Solution :

Le problème sans couplage revient au tenseur suivant qui traduit les énergies dissipées par chaque acteur :

$$g=\begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}$$

Nous y couplons la dimension thermique avec :

$$g=\begin{bmatrix} R_{11}\left(1+\alpha_1 T_1\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{22}\left(1+\alpha_2 T_2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_2 \end{bmatrix}$$

Les sources sont définies par le covecteur énergies – températures : $T=\left[E_1 \quad E_2 \quad T_1 \quad T_2\right]$ et le vecteur des activités neuronales & de leurs carrés:

$$J=\begin{bmatrix} J^1 \\ J^2 \\ J^1 J^1 \\ J^2 J^2 \end{bmatrix}$$

La matrice de g étant purement diagonale, nous pouvons résoudre par exemple le premier flux facilement, sachant que nous avons posé que la variation thermique des dissipations était du second ordre :

$$J^1=\frac{E_1}{R_{11}\left(1+\alpha_1 Y_1 J^1 J^1\right)} \approx J^1=\frac{E_1}{R_{11}} \rightarrow T_1=Y_1\frac{E_1^2}{R_{11}}$$

et par le même cheminement :

$$J^2=\frac{E_2}{R_{22}} \rightarrow T_2=Y_2\frac{E_2^2}{R_{22}}$$

Nous en déduisons pour le débit d'entropie de chaque acteur :

$$\frac{dS_1}{dt}=\frac{1}{T_1}\left(E_1 J^1\right)=\frac{R_{11}}{Y_1 E_1^2}\frac{E_1^2}{R_{11}}=\frac{1}{Y_1} \quad et \quad \frac{dS_2}{dt}=\frac{1}{Y_2}$$

Si maintenant les deux acteurs échangent une partie de leur l'énergie stockée et non encore dissipée, nous avons :

$$g=\begin{bmatrix} R_{11} & jC \\ jC & R_{22} \end{bmatrix}$$

avec le déterminant : $\Delta = R_{11} R_{22} + C^2$, les activités de chaque acteur valent avec la même approximation :

$$\begin{bmatrix} J^1 \\ J^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} R_{22} & -jC \\ -jC & R_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \rightarrow J^1 = \frac{1}{\Delta} \left(R_{22} E_1 - jCE_2 \right) \quad J^2 = \frac{1}{\Delta} \left(-jCE_1 + R_{11} E_2 \right)$$

Nous en déduisons les puissances dissipées :

$$P_1 = \left(\frac{E_1}{4\Delta} \left[R_{22} E_1 - jCE_2 \right] + \frac{E_1}{4\Delta} \left[R_{22} E_1 + jCE_2 \right] \right) = \frac{E_1}{2\Delta} R_{22} E_1 \rightarrow P_2 = \frac{E_2}{2\Delta} R_{11} E_2$$

et stockées :

$$W_1 = \left(\frac{E_1}{4j\Delta} \left[R_{22} E_1 + jCE_2 \right] - \frac{E_1}{4j\Delta} \left[R_{22} E_1 - jCE_2 \right] \right) = \frac{E_1}{2\Delta} CE_2 \rightarrow W_2 = \frac{E_2}{2\Delta} CE_1$$

D’où les débits entropiques :

$$T_1 = Y_1 \left(P_1 \right) \rightarrow \frac{dS_1}{dt} = \frac{P_1 - W_1}{T_1} = \frac{1}{Y_1} \left(1 - \frac{W_1}{P_1} \right) = \frac{1}{Y_1} \left(1 - \frac{CE_2}{R_{22} E_1} \right)$$

et

$$\frac{dS_2}{dt} = \frac{1}{Y_2} \left(1 - \frac{CE_1}{R_{11} E_2} \right)$$

La puissance échangée ne pouvant être supérieure à celle intrinsèque de chaque acteur, puisqu’elle provient d’eux nous avons (puisque nous avons posé E1 = E2) : $C<R_{11}$ et $C<R_{22}$. Et l’entropie de chaque acteur dans le système couplé est inférieure à celle des acteurs séparés.