Énigmes : préalables

Olivier Maurice – Jean-François Vautier

L'objet de ces préalables est de fournir des conventions et notions qui seront ensuite implicites dans les énigmes posées.

Les énigmes que nous allons poser ne sont pas des énigmes mathématiques usuelles. Il s'agit de résoudre des énigmes portant sur l'allure et la forme de matrices dans le but de fournir un « jeu sérieux » aidant à l'apprentissage de l'analyse tensorielle des réseaux.

Première notion : propriété intrinsèque versus extrinsèque

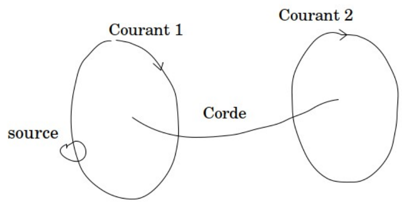
L'analyse tensorielle des réseaux est un formalisme qui permet efficacement de formuler les équations d'un système complexe, et ce dans toute l'assertion du mot pour la systémique.

Nous considérons comme intrinsèque, une propriété qui est rattachée à un objet et ne peut être définie en-dehors de cet objet. A l'inverse une propriété extrinsèque existe avec ou sans la présence de l'objet.

Seconde notion : flux vectoriel et source d'énergie

La notion de dualité est une des notions des mathématiques modernes les plus puissantes. En analyse tensorielle des réseaux nous considérons l'existence de flux (encore appelés courants) traduisant le mouvement de matière entre deux points de l'espace et du temps. Ces courants sont mis en mouvement par des sources d'énergie exogènes ou endogènes Il y a dualité entre la grandeur vectorielle et la grandeur scalaire en ce sens que toute modification sur l'un agit sur l'autre.

Pour représenter visuellement le fonctionnement d'un système complexe nous utilisons des graphes où les sources sont des petits cercles sur des cycles. Sur ces cycles circulent des courants. Entre les cycles, des interactions peuvent exister que nous appellerons des cordes. Le graphe suivant résume ces différents éléments.



Ce graphe est constitué de deux cycles (aussi appelés mailles). Chacune de ces mailles a sa propre propriété. Notons m_{11} la propriété de la première maille et m_{22} celle de la seconde maille. Les deux courants peuvent être regroupés dans un vecteur : c'est une structure en colonne dont chaque ligne contient un des courants. Nous notons :

$$\begin{pmatrix} i1 \\ i2 \end{pmatrix}$$

le vecteur courants de mailles.

Entre une source et un courant nous avons une propriété m. Seule cette propriété qui est comme un opérateur, permet de passer d'un courant (d'un flux) à une source. Nous écrivons par exemple : $e_1=m_{11}\ i^1$. Suivant cette algèbre, tous les symboles ayant un indice en haut sont des courants. Tous les symboles ayant un indice en bas sont des sources et tous les symboles ayant deux indices en bas sont des opérateurs – des propriétés permettant de transformer les courants en sources.

Dans notre premier graphe, nous avons 2 courants. Il nous faut deux sources puisque nous avons dit qu'il y a dualité entre les courants et les sources. Entre les deux, c'est donc un tableau – une matrice – qui va nous permettre de transformer les deux courants en deux sources. Nous avons les deux relations :

$$\begin{cases} e_1 = m_{11}\, i^1 + m_{12}\, i^2 \\ e_2 = m_{21}\, i^1 + m_{22}\, i^2 \end{cases}$$

Ces relations peuvent être obtenues en multipliant le vecteur des courants par une matrice appelée tenseur fondamental, ce qui redonne le vecteur des sources (c'est en fait un covecteur, mais cela n'a aucune importance pour ce que nous voulons travailler). La matrice du tenseur fondamental a l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

Nous ré-obtenons le système d'équations précédent en respectant les règles du produit matriciel : la ligne du vecteur résultat (les sources) est égale à la somme des produits de chaque élément de colonne pour la même ligne de la matrice du tenseur fondamental par la valeur de courant de même numéro de ligne que le numéro de colonne du vecteur courant.

Ce qui nous importe est la structure de la matrice que nous noterons G. C'est sur elle et le graphe correspondant que nos énigmes porteront.