

Sur les fondements (mathématiques) de la Relativité d'échelle (RE)

Thierry Lehner (inspiration de Laurent Nottale)
Cnrs, Laboratoire LUX , Observatoire de Paris-
Meudon

Résumé :

- Cette théorie produit des applications qui fonctionnent bien en physique. Les postulats sur lesquels elle repose demandent encore des justifications au niveau mathématique. On se concentrera sur ce dernier aspect qui implique l'hypothèse d'un espace-temps fractal et sur la **construction de la dérivée covariante** associée.

Qqs mathématiciens intéressés directement par la RE

- Dans le passé : Ben-Ada etc..(à lister)
- Jacky Cresson (prof Uté de Pau) par le passé et encore de nos jours: sur mécanique stochastique, variétés fractales, dérivée stoch (Ds) des pcs , dérivée d'échelle, cohérence de la RE etc..

Dimiter Prodanov (prof en Belgique, NERF,Leuven) dont sur Ds, ...mdpi
2025:Topology of locally and non-locally generalized derivatives

Edoardo Niccolai (Uté de Pise) :cohérence de la RE, espaces fractoides (Arxiv24)...

Maricel Agop (Roumanie) et al, dont livre : Mathematical principles of SR physics, an interpretation

Plan (indicatif)

- 0) Introduction
- 1)ETF et ETE +géodésiques +fractals...
 - 2)Les hypothèses de la RE (applications par ex en MQ et en turbulence fluide)
- 3)Conséquences de la RE -au niveau physique (et au niveau mathématique)
- 4)Détails sur la notion de dérivée d'une fonction fractale/stochastique
- 5)Etablissement de la dérivée covariante ($//RG$) suivant l'ETF de base
- 6)Ce que l'on peut démontrer/(utile) et ce qui restera à faire
- 7)Ce que l'on peut conjecturer/(utile ou non en pratique)
- 8)Travail en cours et problèmes ouverts (pose des pbs de maths...)
- 9)Annexes : autres approches (dont quantification stochastique)+ en mathématiques (lien SPDE, mécanique stochastique) et en physique ($D_f=2$ confirmé/observé sur data en turbulence fluide...)

Introduction : but initial de la RE : fonder la MQ sur le principe de relativité

- A) Espace fractal (EF) seulement (pas t) $ET=(x,t)$ espace des positions
- B) Cas relativiste : espace **et** temps fractaux (ETF)
- C) RG d'échelle (en cours ...)

Résultats : obtention des équations de la MQ comme étant des géodésiques dans un EF ou un ETF

- Equation de Schrodinger avec A)
- Equation de Pauli et de Klein-Gordon +Equation de Dirac avec B)
- NB : Dans tous les cas on doit définir d'abord une dérivée covariante (notée D_t) adéquate pour la situation envisagée
- Extension récente : étude de la turbulence hydrodynamique (dans l'espace des vitesses (v,t) au lieu de celui des positions)
- (avec graine stochastique sous jacente ...)

Principe de relativité

- En 'philo': Les lois de la nature sont les mêmes dans tout changement de référentiel (si chgt licite de coordonnées, CP :ex cas galiléen ...).
- En particulier pour la physique qui traduit ses lois en équations : on doit avoir des équations qui restent invariantes de forme par chgt de coordonnées. Pour A. Einstein : en particulier en se ramenant dans un système inertiel (à $acc=0$)
- le mvt n'est pas intrinsèque mais relatif (entre 2 corps ...)
- La notion de dérivée covariante (indépendante du chgt de référentiel) va intervenir aussi mais en RE dans un sens un peu différent que celle utilisée en RG...

Qqs références (non exhaustif...)

Depuis 2015 ; études/applications de la RE en turbulence hydrodynamique

Livre 2 : Nottale L, 2011, Scale relativity and fractal space time, ICP, 758 p.

Livre 1 : Nottale, L., 1993, Fractal Space-Time and Microphysics : Towards a Theory of Scale Relativity, World Scientific (Book, 347 pp.)

Chapter 5.6 : <http://luth.obspm.fr/~luthier/nottale/LIWOS5-6cor.pdf>

.....

Nottale, L., 1996, Chaos, Solitons & Fractals, 7, 877-938. "Scale Relativity and Fractal Space-Time : Application to Quantum Physics, Cosmology and Chaotic systems".

<http://luth.obspm.fr/~luthier/nottale/arRevFST.pdf>

Nottale, L., 1997, Astron. Astrophys. 327, 867. "Scale relativity and Quantization of the Universe. I. Theoretical framework." <http://luth.obspm.fr/~luthier/nottale/arA&A327.pdf>

Célérier & Nottale 2004 J. Phys. A 37, 931 (arXiv : quant-ph/0609161)

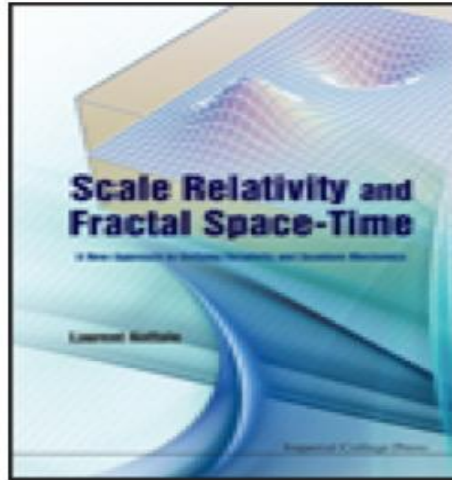
"Quantum-classical transition in scale relativity".

<http://luth.obspm.fr/~luthier/nottale/arDirac.pdf>

Nottale L. & Célérier M.N., 2007, J. Phys. A : Math. Theor. 40, 14471-14498 (arXiv : 0711.2418 [quant-ph]).

"Derivation of the postulates of quantum mechanics from the first principles of scale relativity".

Livre de 2011 (+livre de vulgarisation en anglais en 2020)



Book about **Scale Relativity** (ICP 2011)

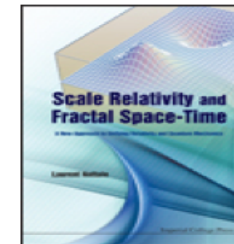


SCALE RELATIVITY AND FRACTAL SPACE-TIME

A New Approach to Unifying Relativity and Quantum Mechanics

by **Laurent Nottale** (*Paris-Meudon Observatory, France*)

This book provides a comprehensive survey of the development of the theory of scale relativity and fractal space-time. It suggests an original solution to the disunified nature of the classical-quantum transition in physical systems, enabling the basis of quantum mechanics on the principle of relativity, provided this principle is extended to scale transformations of the reference system. In the framework of such a newly generalized relativity theory (including position, orientation, motion and now scale transformations), the fundamental laws of physics may be given a general form that unifies and thus goes beyond the classical and quantum regimes taken separately. A related concern of this book is the geometry of space-time, which is described as being fractal and nondifferentiable. It collects and organizes theoretical developments and applications in many fields, including physics, mathematics, astrophysics, cosmology and life sciences.



Qu'est ce qu'un Espace Fractal ? (= E continu (pas discret) et non différentiable p.p)

- Il existe beaucoup d'espaces **métriques** fractals (la métrique est ainsi elle-même fractale) aléatoires qui sont étudiés récemment où les géodésiques (rappel plus loin) sont fractales.
- Ex: la sphère Brownienne, la métrique LQG (Liouville quantum gravity), le 'directed landscape' (surfaces fractales) en lien avec la théorie KPZ (Kandara-Parisi-Zhang) ; autres exs : sphère fractale de Riemann, sphère fractale de Weierstrass...
- Dans ces espaces les géodésiques seront en effet fractales, mais pas forcément de dimension (fractale) $D_f=2$ (elles sont de dimension plus grande que 1 mais pas forcément deux). Ce sont des processus compliqués qui ne sont pas vraiment modélisables par un mouvement brownien...
- La diffusion naturelle sur ces espaces est difficile à construire (sur LQG par ex voir la réf : "Liouville Brownian motion").

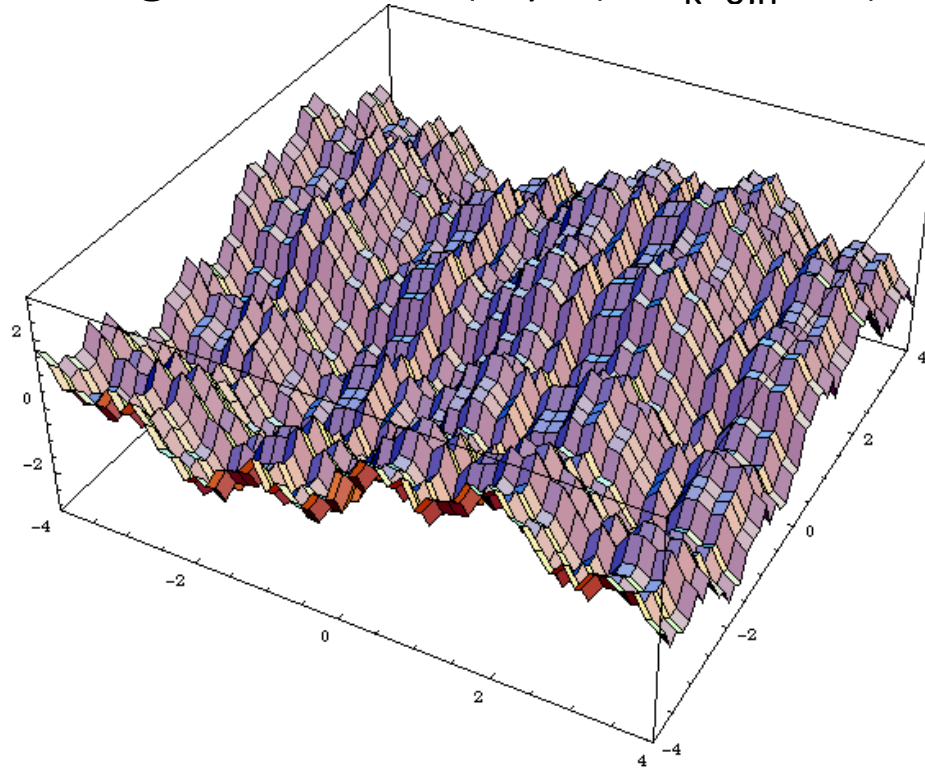
Espace EF (suite)

- Mais on n'a pas encore de modèle connu où bien qu'étant fractal, on puisse définir 2 et seulement 2 notions de vitesse en chaque point. (?)

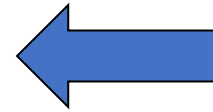
(notion qui sera utile plus loin pour rendre rigoureux le 'dédoublément' de v en RE)

- Dans les exemples ci-mentionnés, on peut toujours définir les géodésiques, mais elles ne sont pas lisses (on ne peut pas parler de vitesse). Car en géométrie fractale, la dérivée est généralement infinie ...
- Référence : bon état de l'art/fractals ex : livre de Bishop et Peres : "Fractals in Probability and Analysis".

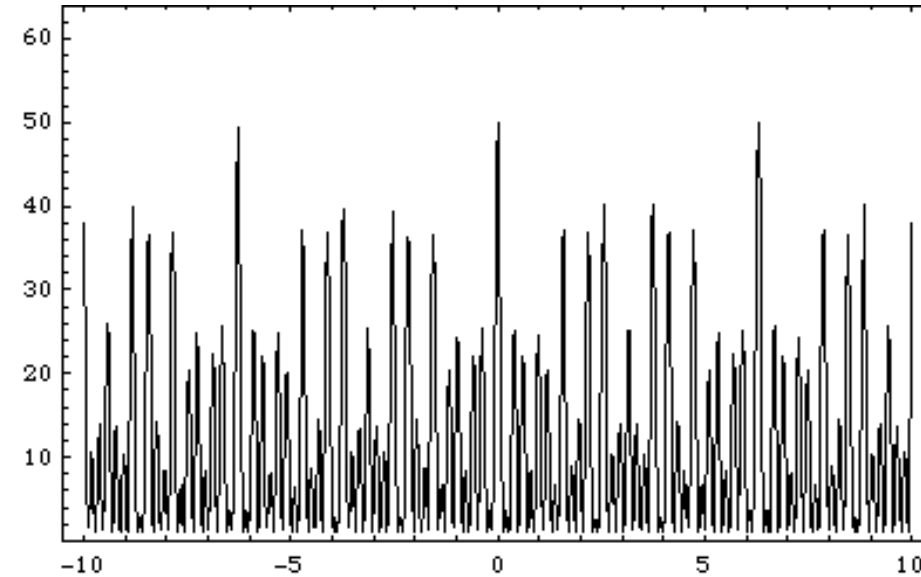
Ex: Métrique et courbure d'une surface fractale (2D),
générateur $s(x,y,n)=\sum_{k=0}^n 2^{-k} (\sin(4^k x) + \sin(4^k y))$ (rés: $n=2$)



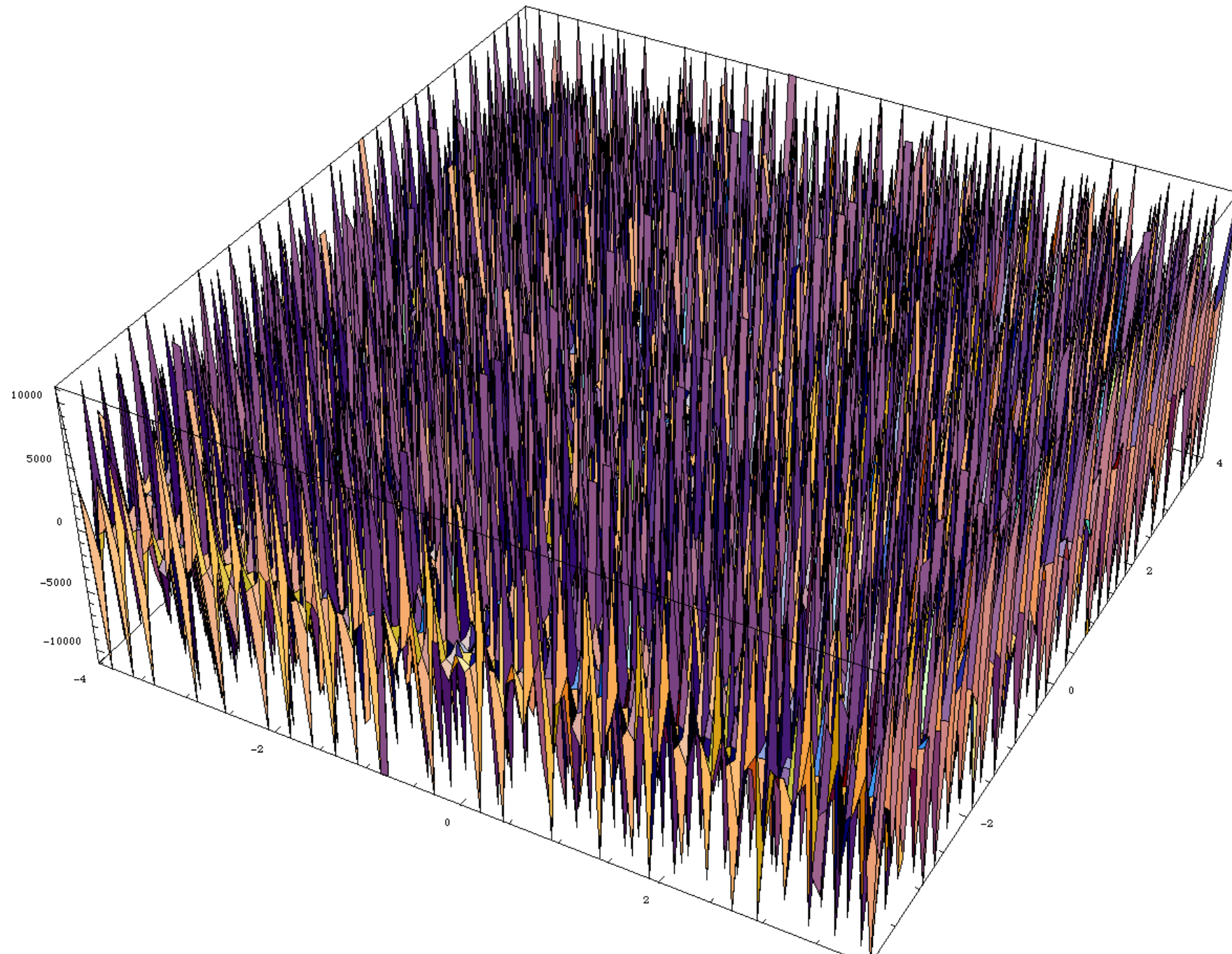
Surface (espace fractal de
dimension topologique 2)



Métrique
(divergente à $n=2$) g_{xx}



Courbure gaussienne d'une surface fractale, résolution $n=3$



Ex de définition de variété fractale (J Cresson vers 2000)

- une variété V est dite fractale si :

- a) il existe une variété différentiable W et un homéomorphisme

$h : V \rightarrow W$

- b) Il n'existe pas d'applications de $R \rightarrow V$ différentiables hormis les applications différentiables '**triviales**' définies par (sur) W

Déf : pour $W1$ et $W2$ (vars diffs): f appli diff de $R \rightarrow W1$ est dite **triviale** si il existe g appli diff de $R \rightarrow W2$ telle que $f = h^{-1} \circ g$

(h homéomorphisme de $W1 \rightarrow W2$)

(-cf ex de construction explicite...)

-voir connexions et géodésiques...(dans un sens généralisé))

notion de géodésique (non F ou Fractale)

Pour une distance définie dans un espace métrique (ou un tenseur métrique par ex) :

$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, mesure la 'distance' entre '2 pts' voisins

- la géodésique au sens usuel est une courbe , à l'échelle locale, qui relie les points en minimisant la « distance » (cela peut être le temps).

En RG : une particule (test) de vitesse V suit une géodésique au sens que dans un réf inertiel (à $acc = 0$) on a : $d^*/dt(V) = 0$. A partir de la connexion de Levi-Civita , on a ici:

$d^2 x^a / dl^2 + \Gamma^a_{bc} dx^b / dl dx^c / dl = 0$, $\Gamma^a_{bc}(g)$ symboles de Christoffels /courbure

-la géodésique (au sens généralisé) dans le cas d'un ET fractal: idem, si la métrique g_{ij} est aussi fractale avec par ex une décomposition de type : $g_{ij} = g_{ij,dét} + g_{ij,stoch}$, on peut définir un ds fractal et écrire formellement au moins une eq des géodésiques comme ci-dessus avec le ds associé

CP: Statut du photon (particule de masse $m=0$) : en RG il suit les géodésiques de l'ET (par ex espace courbe de Riemann), mais ce sera aussi différent en RE.

-Voir statut d'une particule test en RE...(plus loin)

Les processus de diffusion peuvent être très différents selon que la particule est de masse nulle ou non (car opérateurs H fonctions de la masse m , $H \rightarrow 0$ si $m \rightarrow 0$).

géodésiques en RE

En RE en plus : les particules **sont** le réseau des géodésiques elles mêmes :elles ne suivent pas une géodésique donnée comme en RG, elles sont 'fabriquées' par ce réseau (avec dédoublement du réseau en tout point).

Equation des géodésiques : $Dt(V^*)=0$, V^* vitesse complexe et Dt dérivée covariante (déf +loin) dans ETF =manifestation du principe d'équivalence résultant de la relativité d'un objet particulier.

-At this level the particle will be formed through its network of (virtual) geodesics. While particles with zero mass like photons can be treated as usual particles (as bosons)

-En pratique on aura une seule trajectoire réalisée (mesurée) parmi l'infinité des possibles...

-Cas du vide lui même de l'ET(F) : il peut être considéré comme étant aussi fractal

-The nature of the fractal(s) remains unknown but it may be coming from any or many different non self similar structures.

(ailleurs : In addition in RE the origin of the electromagnetic field can be understood as fields of dilatation and contraction transformations of the space-time (for example emanating from electrons))

Fractal objects or F functions (1)

- Property : object structured at various scales (zoom)
- Curve or surface formed by deterministic or by stochastic rules
- **Intrinsic fractality : explicit scale dependence**
- Example : non differentiability + continuity $\rightarrow$ fractality (theorem LN)
- $L(\varepsilon) \rightarrow \infty$ if $\varepsilon \rightarrow 0$
- **Non stochastic fractals** (ex: self similar ones with scale invariance, or not self similar)
- a) by iteration of functions like Cantor set, von Koch snow curve and so on
- b) by a recurrence relation between zooms like Mandelbrot – Julia set, Lyapounov fractal
- c) random fractals like fractal landscapes in the sense of a probability to get a given structure at each zoom

Transformation $\varepsilon = dx$: simplest example $dL/d\ln\varepsilon = \varepsilon dL/d\varepsilon = \text{cte}$

$\rightarrow L = L_0(1 + (\lambda/\varepsilon)^{D_f-1})$ (0) D_f fractal dimension, then L is an explicit function of λ and of $dx = \varepsilon$ as a power law (in this case) : $f(x, dx)$
here is divergent in scale for $\varepsilon \rightarrow 0$, CP: $1/\lambda$ **transition scale fractal/non fractal** ...

(see drawings example : $\ln(L/L_0) = g(\ln(\lambda/\varepsilon)) \dots$) which corresponds to stochastic/determinist motion transition

Fractals (2)

- stochastic “fractal” (also of class c above)
- Link with stochastic process (pcs) in usual sense of evolution (cc or discrete) of a random variable
- like typically diffusion cases : Brownian motion, Mandelbrot (fractBm) , or more general (SDE's):

$$dx=f(x,t)dt +dBt, (dBt)^2=\sigma dt \quad (1-2) \quad CP =\sigma=cte$$

- For ex: if $x(t,dt)$ is itself « stochastic fractal » as a coordinate then put it into a function F :

$F(x,t) \rightarrow F(x(t,dt),t)$: F becomes fractal itself externally through its fractal coordinate x , but in the GC : F could be both intrinsically and extrinsically fractal : for example $F(x(t,dt),t,dt)$...

Definition de la dimension fractale Df

- **Hausdorff dimension**
- **Principle:**
Given any set K in a metric space, we define the α -**dimensional Hausdorff**
- **content** as
- $H^\alpha(K) = \{ \inf \sum_i |V_i|^\alpha : K \subset \bigcup_i (V_i) \}$,
- where $\{V_i\}$ is a countable cover of K by any sets and $(|V_i| < |E|)$, $|E|$ denotes the diameter of a set E .
Definition : The **Hausdorff dimension** of K is defined to be :
- $\dim(K) = \inf\{\alpha : H^\alpha(K) = 0\}$.
- More generally we define :
- $H^\alpha_\epsilon(K) = \{ \inf \sum_i |V_i|^\alpha : K \subset \bigcup_i (V_i), |V_i| < \epsilon \}$,
- where each V_i is now required to have a diameter less than ϵ . The α -**dimensional**
- **Hausdorff measure** of K is defined as $H^\alpha(K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H^\alpha_\epsilon(K)$

2) SR(RE) principles

Principle of relativity of scales

The theory of scale-relativity and fractal space-time was initially constructed in order to obtain a geometric foundation of quantum mechanics (QM) from first principles. This has been achieved by deriving all the QM postulates from the only principle of relativity, provided it is applied to position, orientation and motion (as in Galileo, Poincaré and Einstein theories of relativity), but also to scales, i.e. including resolution transformations of the coordinate system.

The theory is based on the **relaxation of the hypothesis of space-time differentiability**. One can **prove that a continuous but non-differentiable space (more generally space-time) is fractal**, under a general meaning going beyond mere self-similarity: namely, lengths become explicitly dependent on the resolution scale and are diverging when the resolution **interval** tends to zero.

2) Les hypothèses de la RE (et leurs conséquences)

- L'hypothèse de base **essentielle** est l'abandon de la différentiabilité : l'espace-temps **NATURE?(métrique)** (noté (x,t)) est alors **fractal** à toutes les échelles (voir démonstration plus loin), car il est supposé être continu mais non différentiable presque partout. En particulier on voudrait en examiner les conséquences sur les géodésiques (fractales) de ce $ET(x,t)$.
- (pb ouvert : sur la nature de ce ET fractal, pas 'contraint' ni spécifié a priori)

Les fonctions (définies sur $ETF \rightarrow$ Espace d'arrivée...) deviennent fractales (dépendantes de la résolution ou de l'échelle) au moins à travers leurs coordonnées

-> Existence d'un espace des échelles « relié » à celui des positions car $x(dx)...$ (espace noté ETE)

En conséquence le principe de relativité est aussi étendu aux résolutions dans cet espace des échelles (dx,dt) qui est 'adjacent' à l'espace des coordonnées (x,t) (pb: **trouver meilleure terminologie et les liens possibles entre ET et ETE**)

- Construction de la RE Galiléenne, RE en RR/Lorentz, en construction : la RG de la RE (en indiquer les difficultés)
- L'idée générale en RE est que l'espace-temps dont aux petites échelles/échelles de de Broglie des particules ($l_B = \hbar/p$), possède des fluctuations de nature stochastique/aléatoire, dues notamment à l'énergie du vide, la RE est ainsi une théorie des fluctuations quantiques au **niveau macroscopique**.
- **autre pb en maths : comment faire le plongement d'un ETF dans une variété diff (par ex Riemannienne) ? (approche moderne : liée à la gravité quantique...)**

Démonstration LN de ; cc+non diff>fractal

- Par contraposition d'un théorème de Lebesgue :
- Une courbe continue de longueur finie est différentiable (en tout pt) ou bien presque partout différentiable.
- Valable pour une courbe, une fonction, ou autre objet comme un espace...

Conséquences (en physique) (1)

- **à la main ici** ; la non différentiabilité de l'espace va impliquer que en tout point les dérivées sont infinies (à D et à G) pour la vitesse $v=dx/dt$ qui va ainsi se dédoubler. On est alors un processus hyper-diffusif dont la conséquence est que les géodésiques vont avoir une dimension fractale (D_f) égale à 2 (ou aussi voir cas plus général?). On pourra ensuite modéliser le 'mouvement' sur ces géodésiques par des processus stochastiques (de type Brownien par exemple).
- **Ceci reste à démontrer précisément en maths**, car on a seulement des observations expérimentales à savoir que $D_f=2$ sur des trajectoires réalisées $x(t)$ de particules dans des expériences (voir ex en annexe)
- Le dédoublement est ainsi une pté discrète (supposée être 'quasi' générique ?) ici mais pas forcément universelle? (brisure de symétrie discrète $dt \rightarrow -dt$).

Conséquences (en physique) (2)

- The covariant derivative is the manifestation of the presence of underlying stochastic processes, like Brownian motion for example...
- -the emergence of a scale of transition fractal-non fractal at the de Broglie wavelength ($\lambda_B = \hbar/p$) of a given particle of momentum p . The fractal space being at the small scale below λ_B . This wavelength may be generalized in the case of vacuum by introducing the vacuum energy.
- -the emergence of a stochastic potential (noted as Q) as a potential energy of the fractal space-time (ETF) with, in non relativistic case, $V_Q = -2D^2 \Delta(P^{1/2}) / P^{1/2}$, Δ in given space...
- -If we do not take the limit of zero resolutions for dt or dx so we can keep the memory of the motion of given stochastic 'trajectories'.
- -Chaos and hyper -chaos may appear beyond relevant integral scales, but SRT is acting beyond the usual chaos.
- -SRT can appear in x (like in QM) but also in v space (like in turbulence) or even in both x space and v space with a transition inbetween the two behaviors according to the relevant scales (this can seen in the case of experiments on turbulence).
- -Structure of the space-time can be explored for example as toy model according to the choice of an arbitrary selected fractal set...

Espace-Temps des échelles (ETE)

- Nature de l'ETE: espace métrique au moins (Euclidien) pour les résolutions qui sont de nature tensorielle (formes multilinéaires dans un E. V) à 4D, avec un tenseur S_{ij} symétrique (avec corrélations) ; en RE /RR on va passer à 5D.
- Comment x ou t dépendent de dx et de dt ...? Et par quels pcs ?
- CP : graine stochastique sous jacente de type Brownienne : dx^2 en dt en (x,t) (dv^2 en dt , en (v,t))
- ETF et ETE sont aussi '**couplés**', effectivement, dans notre interprétation de la jauge, des charges et des champs de jauge, qui apparaissent comme effets de transformation dans l'espace des échelle de résolution induits par les transformations dans l'espace des positions.
- Nature de ETE : si pas Fract (F) (donc restant différentiable)-> on obtient la MQ usuelle en (x,t) , mais si ETE est lui aussi F : on aura une MQ dans l'ETE ...
- ->Une question ouverte reliée ensuite est la construction de la « super MQ » associée qui en résulte alors dans l'espace ETF de départ...

ETE (suite)

Suite:

Espace de échelles (E-Ech ou ETE)($\delta x, \delta t$) qui (postulé) obéit aux mêmes lois de transformations que les coordonnées de l'ETF usuel (x, t)

Souvent dans l'E-Ech la résolution intervient en log :

$f(t, \ln(\delta t/\tau))$

Si les coordonnées x et/ou t sont elles aussi fractales

(Brownien etc..) on pourra écrire : $f(t(\delta t), \delta t)$ ou bien

$f(t(\ln(\delta t/\tau)), \ln(\delta t/\tau))$

Opérateur de dilatation (méthode de Gell-Mann-Lévy):

$$\mathcal{L}(\varepsilon') = \mathcal{L}(\varepsilon + \varepsilon d\rho) = \mathcal{L}(\varepsilon) + \frac{\partial \mathcal{L}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \varepsilon d\rho = (1 + \tilde{D} d\rho) \mathcal{L}(\varepsilon),$$

$$\tilde{D} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \ln \varepsilon}$$

Equation différentielle d'échelle du premier ordre:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \varepsilon)}{\partial \ln \varepsilon} = \beta(\mathcal{L})$$

Développement limité:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \varepsilon)}{\partial \ln \varepsilon} = a + b\mathcal{L}$$

Solution: fractale de dimension constante + transition:

$$\mathcal{L}(x, \varepsilon) = \mathcal{L}_0(x) \left[1 + \zeta(x) \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{-b} \right]$$

Groupe de Galilée d'échelle

Comportement asymptotique:

$$\mathcal{L}(x, \varepsilon) = \mathcal{L}_0(x) \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^\delta$$

Transformation d'échelle:

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$$

$$\ln \frac{\mathcal{L}(\varepsilon')}{\mathcal{L}_0} = \ln \frac{\mathcal{L}(\varepsilon)}{\mathcal{L}_0} + \delta(\varepsilon) \ln \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right)$$

$$\delta(\varepsilon') = \delta(\varepsilon)$$

Loi de composition des dilatations:

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon' \rightarrow \varepsilon''$$

$$\ln \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon} \right) = \ln \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right) + \ln \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right)$$

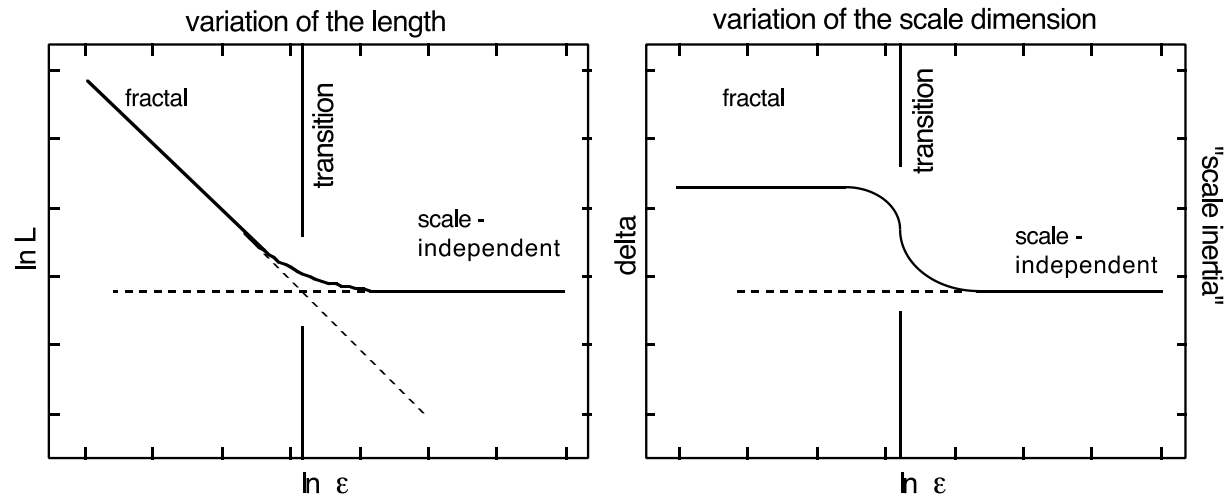
Résultat: structure mathématique du groupe de Galilée $\rightarrow$

-satisfait au principe de relativité d'échelle-

$$X' = X - VT, \quad T' = T, \quad W = U + V$$

$$\mathcal{L}(x, \varepsilon) = \mathcal{L}_0(x) \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^\delta \right]$$

$$\delta_{\text{eff}} = \frac{\delta}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right)^\delta}$$



Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective ($\delta = D_F - 1$) dans le cas de lois d'« inertie d'échelle » (solutions d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre).

Transition fractal-non fractal for $L(\varepsilon) = L_0(1 + (\lambda/\varepsilon))^{\tau_f}$

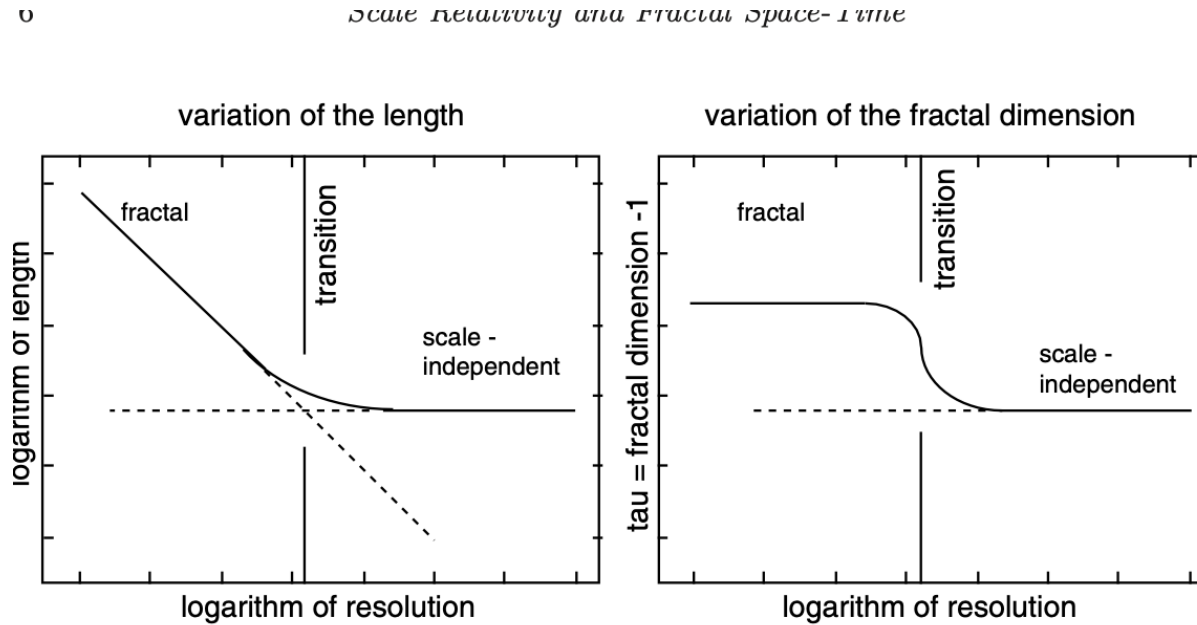


Fig. 4.1: **Fractal length and fractal dimension: self-similar fractal.** The two figures show the scale dependence of the length of a fractal curve (Eq. 4.8) and of its effective fractal dimension (Eq. 4.19) in the case of “inertial” or “Galilean-like” scale laws, which are solutions of a simple first order scale-differential equation. Toward the small scale one obtains a scale-invariant law with constant fractal dimension, while the explicit scale-dependence is lost at scales larger than some transition scale λ .

Longueur d'une courbe fractale

Deux façons de mesurer la longueur d'une courbe fractale, en fonction

(1) de la résolution spatiale δX : mesure *statique*

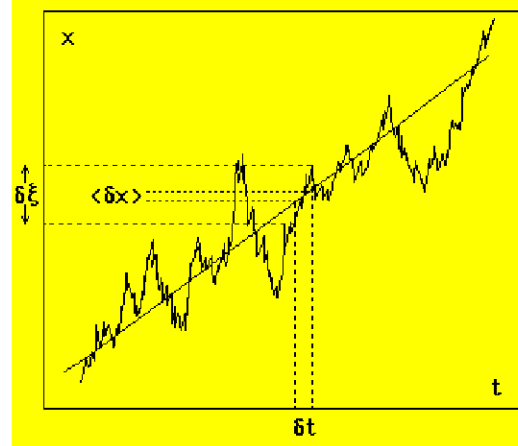
(2) de la résolution temporelle δt (= invariant): mesure *cinématique*

--> formules asymptotiques (parties fractales):

$$\mathcal{L}(\zeta, \delta X) = \mathcal{L}_0(\zeta) \left(\frac{\lambda}{\delta X} \right)^\delta$$

$$\mathcal{L}(\zeta, \delta t) = \mathcal{L}_0(\zeta) \left(\frac{\tau}{\delta t} \right)^{1 - \frac{1}{D_F}}$$

$$\delta = D_F - D_T = D_F - 1$$



Relation entre intervalles de résolution spatiale et temporelle:

$$\left(\frac{\delta X}{\lambda} \right)^{D_F} = \left(\frac{\delta t}{\tau} \right)$$

Dérivation /résolution dans l'ETE , dont en $\ln(dt/\tau)$

- RE d'échelle Galiléenne vue
- RR d' échelle(elle a été aussi développée)
- RG d'échelle (encore à construire)
- (Voir aussi en annexe sur la dynamique d'échelle+possibles brisures de symétries dans l'ETE ...)

Dimensions fractales variables

Généralisation: dimensions fractales variables

Analogie avec les lois du mouvement

Aristote: « le temps est la mesure du mouvement » $\rightarrow$ variables primaires x et v , le temps t s'en déduit

$$t = \frac{x}{v}$$

Galilée: « renversement » des variables
+ caractère vectoriel de x et v + petites quantités (anticipant le calcul différentiel)

$$v^k = \frac{dx^k}{dt}$$

Newton: passage à la dynamique, définition de l'accélération comme dérivée seconde

$$a^k = \frac{d^2 x^k}{dt^2}$$

Mandelbrot: définition de la dimension d'échelle $\delta = D_F - D_T$: $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{D_F - D_T}$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\ln(\mathcal{M}/\mathcal{M}_0)}{\ln(\lambda/\varepsilon)}$$

Dimension variable: passage à une définition locale

$$\delta = - \frac{d \ln \mathcal{M}}{d \ln \varepsilon}$$

Renversement des variables: projection + résolutions comme « vitesses d'échelle »

$$\ln \frac{\varepsilon^k}{\lambda^k} = \frac{d \ln \mathcal{L}^k}{d \delta}$$

Nouveau concept: « Accélération d'échelle »

$$\Gamma^k = \frac{d^2 \ln \mathcal{L}^k}{d \delta^2} \quad 12$$

sur le potentiel stochastique $Q(V_Q)$

- Q émerge comme une E_p provenant de la fractalité de l'ETF

Expression cas classique : $V_Q = -2D^2 \Delta(P^{1/2}) / P^{1/2}$, Δ dans un espace (métrique) donné

D coefficient de diffusion

-Lien entre P (probabilité/fonction d'onde) et ρ (densité de matière)...

- Généralisation en RR: dans V_Q : $\Delta \rightarrow$ d'Alembertien (en x, t)
- En RG : avec Δ et d^2/dt^2 qui dépendent alors des g_{ij} , si espace courbe etc...ou F

- $\rightarrow$ Bouclage possible pour les **fluctuations « stochastiques » des g_{ij}** :

-si on veut combiner les 2 effets (courbure et fractalité) :

si aux mêmes échelles $\rightarrow$ gravité quantique, pb très difficile.

si échelles différentes, séparable? Un essai de LN dans cet article :

- Nottale L., 1997, Astron. Astrophys., 327, 867, "Scale relativity and Quantization of the Universe. I. Theoretical framework"
- Espaces fractoides (essai de E Niccolai, en 2024)

Résumé rapide « pédagogique-pédestre » à ce stade

- ETF->émergence d' un potentiel supplémentaire (d'origine géométrique/stochastique) V_Q qui va modifier la dynamique des particules
- $V_Q = -2D^2 L(\rho^{1/2}) / \rho^{1/2}$, L =Laplacien (espace à préciser : plat ou non)
- le coefficient de diffusion D va dépendre du système physique considéré.
- Lien avec un mouvement diffusif classique en écrivant la différentielle du mouvement sous la forme :
- $dX = v(X,t) dt + \sigma(X,t) dW_t$ où W_t est un processus Brownien (qui varie en $dt^{1/2}$) et de variance $\sigma(X,t)$
- CP : si σ =constante, sa densité de probabilité $u(x,t)$ obéit à une équation de la chaleur soit : $du/dt = D \Delta(u)$, dont le coefficient de diffusion est le D cherché relié à la variance du processus par la relation : $D = \sigma^2 / 2$
- On remarquera que la relation donnée ici pour $V_Q(r)$ est non linéaire contrairement à l'équation de Poisson habituelle qui relie linéairement le potentiel et la densité. (A ce titre elle va jouer ici un rôle 'd'amplificateur de masse' dans son action....)
- On montre par ailleurs que l'équation de Newton ($F=ma$) en présence du mouvement Brownien devient une équation de structure analogue à celle de Schrödinger de la mécanique quantique ([à voir plus loin, car établir la Dt d'abord](#)) .
- Pour une particule de masse m , la fonction d'onde notée $y(x,t)$ obéit ainsi à l'équation suivante :
- de type Schrodinger $(iD d/dt + D^2 \Delta - U/2m)y(x,t) = 0$
- avec la donnée des conditions appropriées initiales et aux limites., U est le potentiel subi par la particule.
- On a : $P = \rho = y^2$, où P est la probabilité de présence de la particule (qui coïncide ici avec la densité de masse)

En MQ usuelle au niveau microscopique, on a la relation : $D = \hbar / 2m$, $\hbar$ étant la constante de Planck.

Conditions d'application de la RE

les 3 conditions préalables pour pouvoir appliquer la RE :

- a) existence d'une infinité de géodésiques
- b) chaque géodésique est fractale et de dimension fractale 2 , dont le champ de vitesse au sens ou elle dépend explicitement de la résolution
- (par ex de dt) et elle diverge lorsque cet intervalle d'échelle (ici le dt) tend vers zéro.
- c) la non différentiabilité implique que la vitesse (dérivée de la position ou de la coordonnée) devient bi-valuée (dédoublement) en tout point par brisure de la symétrie $dt \rightarrow -dt$.
- lien avec des processus de Markov mais plus général aussi si non Markov, ex: pcs de Bernstein (JC Zambrini), pcs de Hawkes (D Sornette)

4) 'dérivée' d'une fonction fractale (1)

- **Fractal « derivatives » (LN , ref book 1 1993)**
- Def : (LN) une fonction $f(x, \varepsilon)$ est fractale(F) si elle est fonction de x et d'une résolution ε qui vérifie les 2 relations suivantes :
- 1) Pour tous x et $\varepsilon' > \varepsilon$ $f(x, \varepsilon') = \text{Intégrale } (\phi(x, y, \varepsilon') f(x+y, \varepsilon) dy)$
- Où $(\phi(x, y, \varepsilon'))$ est une fonction de lissage de résolution ε'
- 2) égalité (classe d'équivalence en résolution) $f=g \leftrightarrow$ pour tous ε et x il existe x'
- $|x-x'| < k \varepsilon$, $f(x, \varepsilon) = g(x', \varepsilon)$, où k est un facteur statistique 'd'accord'

if $f(x, \varepsilon)$ is an intrinsic fractal function , then generically :

its "derivative" writes (at fixed ε) $df/dx = h(x)(1 + \gamma(x, \varepsilon)(\lambda/\varepsilon)^\delta)$ and it diverges if $\varepsilon \rightarrow 0$, then if ε varies γ is also a function of ε

- also $d\gamma(x, \varepsilon)/dx = \gamma(x, \varepsilon)(\lambda/\varepsilon)$ is itself scale divergent if $\varepsilon \rightarrow 0$
- $(f(t, \varepsilon))$ in general, by studying the $\lim(\varepsilon \rightarrow 0) f(t, \varepsilon) \dots$, +autres défs en maths...

4) dérivée de fonction fractale (2)

- Case of Brownian coordinates -> use Ito Lemma for fractal extrinsic derivative :
- $Dh(x(t,dt),t)/dt = dh/dt + dh/dx f(x,t) + (\sigma/2) d^2h/dx^2$

A Laplacian term appears here at second order in x to get a term of 1st order in dt (because the Brownian motion in x scales **here** as $dt^{1/2}$)

- For fractal functions $f(t,dt)$ we can define 2 derivatives (which do not coincide) : $d+$ and $d-$ as :
- $d+f/dt = (f(t+dt,dt) - f(t,dt))/dt$
- $d-f/dt = (f(t,dt) - f(t-dt,dt))/dt$
- dt is here a (physical) resolution and not a differential element in general, also dt is taken to be independent of t .
- Need of 2 pts to define a derivative : one pt before (at $t-dt$) and one pt after (at $t+dt$); and we can define only two derivatives here
- This possible dedoubling of derivative if $d+f$ differs from $d-f$ is specific of a fractal function **at each point**.
- **The dedoubling of $v (=dx/dt)$ or of $a (=dv/dt)$ leads to use complex variables ; and we shall get a Schrodinger Kernel of the kind : $i()d/dt + () d^2/dx^2$ (see later)**
- (Main application here will be here in QM and turbulence)
- (Also link with multifractal functions : in the sense of having local fractal dimensions exponents but varying with the scale , like in turbulence)
- See other possible definitions of derivatives for pcs in maths (JCresson, D Prodanov, see here ex in annexe from JC Zambrini)

4) dérivée de fonction fractale (3)

Exemple for variable v (if v is a fractal function like in fluid turbulence)

Within a Taylor expansion around a given pt $t(=t_0)$:-> $dv/dt = v'(t) + v''(t)/2 dt + \dots = v'(t) + dv'(t)/2 + \dots$

standard case: $dv'(t)$ prop to dt this $dv' \rightarrow 0$ for $dt \rightarrow 0$, or for dt small enough such that $dv' \ll v'$

but in fractal case: $v(t) \rightarrow v(t, dt)$ and above all dv' could be of order v' (dv' not small/ v');

we can then define again : $d+ v(t, dt)/dt = (v(t+dt, dt) - v(t, dt))/dt$ and $d- v(t, dt)/dt = (v(t, dt) - v(t-dt, dt))/dt$

- But with $dv'(t, dt)$ no longer negligible with respect to $v'(t, dt)$ -> implies two possible expressions for the acceleration ($a = dv/dt$)
- which are no longer equal since we get :
- $a+ = d+ v(t, dt)/dt = v'(t, dt) + dv'(t, dt)/2$ and $a- = d- v(t, dt)/dt = v'(t, dt) - dv'(t, dt)/2$
-

Therefore, there is a two-valuedness of the possible values of the a since, in general, $a+ \neq a-$.

- Note that this two-valuedness does not come from time reversal. The two (+) and (-) values are *not* a forward and a backward acceleration.
- In both cases, time goes, as physically expected, from past to future: one goes from one definition to the other by the transformation ($dt \rightarrow -dt$), not by ($t \rightarrow -t$).
- Nor it is a left and right derivative of a standard function: **this two-valuedness is specific of fractal functions which are explicitly dependent on the finite differential element dt , identified with a resolution interval.**

Ex de fonction fractale (et de sa dérivée qui l'égale...) (cf LN livre 1 de 1993)

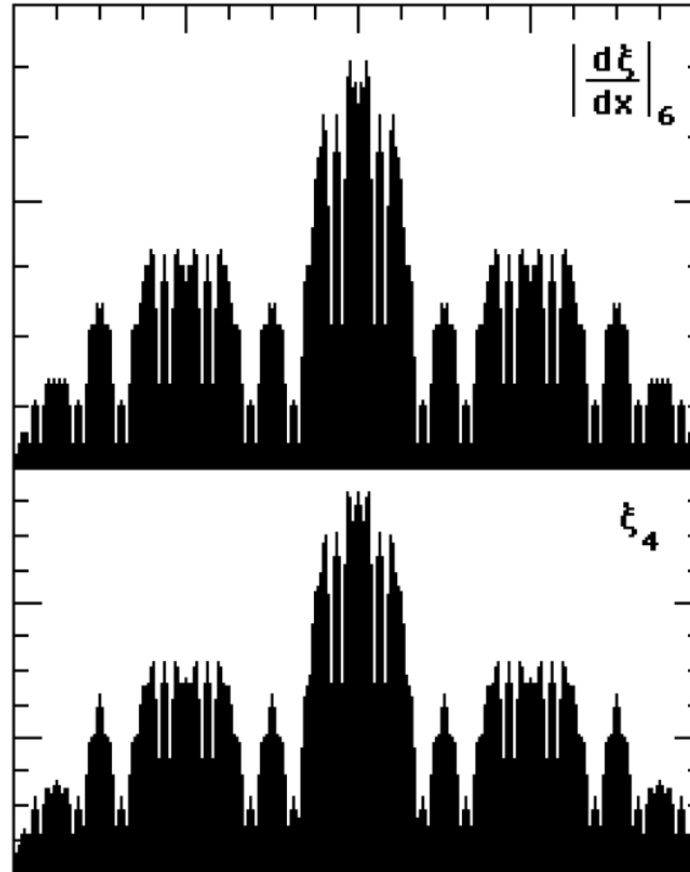


FIG. 8. An example, excerpt from Nottale (1993) (Ref. 18, Fig. 3.18 p. 79), of a fractal function which closely looks like its own derivative. It is constructed from a projection of a fractal curve whose generator is a zig-zag made of 8 segments of length $1/4$ (then of fractal dimension $D_f = 3/2$).

5) Construction de la dérivée covariante

a) heuristique

Résultats dans le cas A) Espace Fractal (EF)

Démonstrations : cas géo, cas stochastique

Hypothèses nécessaires

Justification des hypothèses ...

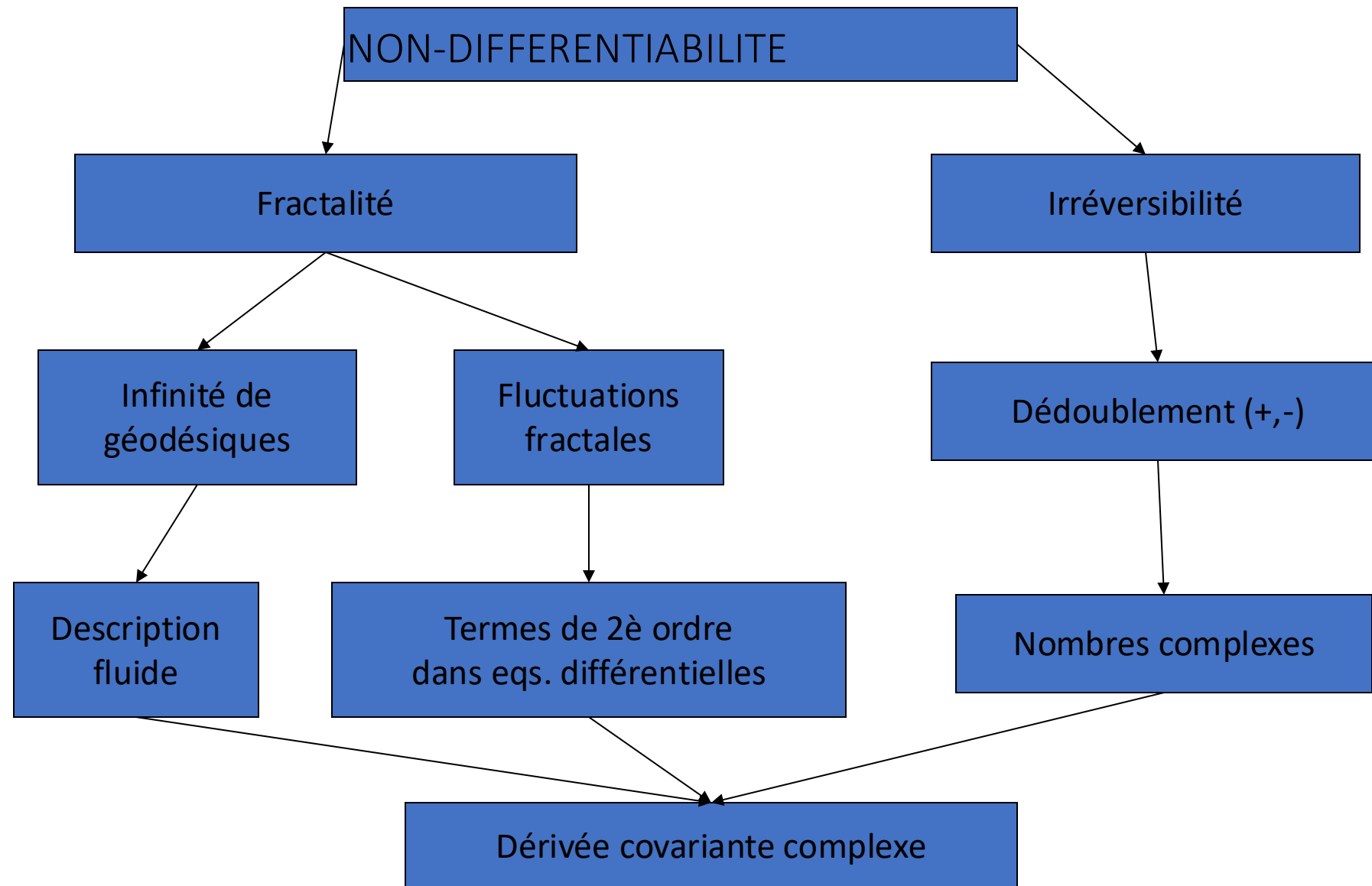
B) Idem dans le cas relativiste : ETF

C) En RG d'échelle (en cours de construction ...)

Conséquences cherchées ici : Obtention des eqs de la MQ

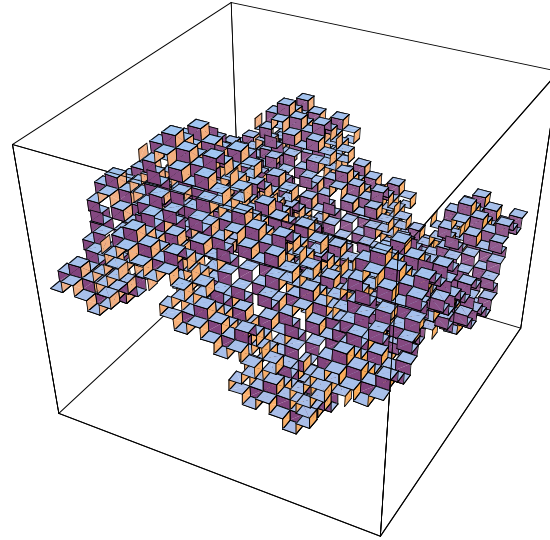
Equation de Schrodinger avec A)

Equation de Pauli et de Klein-Gordon et de Dirac avec B)



$$\frac{d'}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V} \cdot \nabla - i\mathcal{D}\Delta$$

Voie vers Schrödinger (1): infinité de géodésiques



—> Approche « fluide »:

$$V(t) \rightarrow V[x(t, \delta t), t, \delta t] = v[x(t), t] + W[x(t, \delta t), t, \delta t]$$

Différentiable



Non-différentiable⁷



Voie vers Schrödinger (2): ‘partie classique’ (différentiable) et ‘partie fractale’

Loi d’échelle minimale (en fonction de la résolution spatiale):

$$\mathcal{L}(x, \varepsilon) = \mathcal{L}_0(x) \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^\delta \right] \quad (\varepsilon_x / \lambda)^{D_F} = (\varepsilon_t / \lambda)$$

Version différentielle (en fonction de la résolution temporelle):

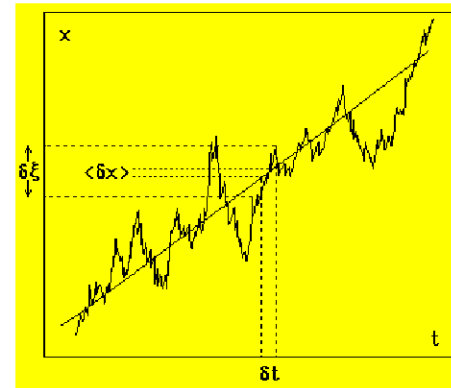
$$dX = dx + d\xi \quad \langle \eta \rangle = 0$$

$$dx = v dt \quad \langle \eta^2 \rangle = 1$$

$$d\xi = \eta \sqrt{2\mathcal{D}} (dt^2)^{1/2 D_F}$$

Cas de la dimension fractale critique $D_F = 2$:

$$d\xi = \eta \sqrt{2\mathcal{D}} dt^{1/2}$$



Voie vers Schrödinger (3): non-différentiabilité $\longrightarrow$ complexes

Définition ordinaire de la dérivée:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-dt)}{dt}$$

N'EXISTE PLUS (non-différentiabilité) ! $\longrightarrow$ nouvelle définition:

$f(t, dt)$ = fonction fractale:
fonction explicite de dt , variable d'échelle (« résolution »)

$$f'_+(t, dt) = \frac{f(t+dt, dt) - f(t, dt)}{dt} \qquad f'_-(t, dt) = \frac{f(t, dt) - f(t-dt, dt)}{dt}$$

Deux définitions au lieu d'une: on passe de l'une à l'autre par la réflexion
 $dt \longleftrightarrow -dt$

$$\left. \begin{aligned} dX_+(t) &= v_+ dt + d\xi_+(t) \\ dX_-(t) &= v_- dt + d\xi_-(t) \end{aligned} \right| \mathcal{V} = \frac{v_+ + v_-}{2} - i \frac{v_+ - v_-}{2}$$

Amélioration de la covariance « quantique »

Ref.: Nottale L., 2004, American Institute of Physics Conference Proceedings 718, 68-95
“The Theory of Scale Relativity : Non-Differentiable Geometry and Fractal Space- Time”.
<http://luth.obspm.fr/~luthier/nottale/arcasys03.pdf>

On introduit l'opérateur de vitesse complexe:

$$\hat{\mathcal{V}} = \mathcal{V} - i\mathcal{D}\nabla$$

En terme de cet opérateur, la dérivée covariante-quantique s'écrit:

$$\frac{\hat{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{V}} \cdot \nabla$$

Elle satisfait alors à la règle de Leibniz *du premier ordre* pour les dérivées partielles et la composition de fonction.

Opérateur de dérivation covariante

Partie
Classique
(différentiable)

$$\frac{d'}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d_+}{dt} + \frac{d_-}{dt} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{d_+}{dt} - \frac{d_-}{dt} \right)$$

$$\mathcal{V} = \frac{d'}{dt} x(t) = V - iU = \frac{v_+ + v_-}{2} - i \frac{v_+ - v_-}{2}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dX_i}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dX_i dX_j}{dt}$$

$$\left\langle \frac{dX_i}{dt} \right\rangle = \frac{dx_i}{dt} \quad \left\langle \frac{dX_i dX_j}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d\xi_i d\xi_j}{dt} \right\rangle = 2\mathcal{D} \delta_{ij}$$

$$\frac{d_{\pm} f}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\pm} \cdot \nabla \pm \mathcal{D} \Delta \right) f$$

$$\boxed{\frac{d'}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V} \cdot \nabla - i\mathcal{D} \Delta}$$

5) Construction de la dérivée covariante (dans l'EF)

b)pcs : Stochastic derivative and embedding (1) (for $D_f=2$)

- Using Ito lemma+ complex variable one can build a « covariant » derivative $d'/dt(=Dt)$
- D diffusion coefficient, V_{rond} complex velocity= V^*
- with $(d'/dt=Dt)$ to be applied next to **V_{rond} itself:**
- **Result:**

$$\frac{d'}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V} \cdot \nabla - i\mathcal{D}\Delta$$

5) Stochastic derivative (2)

- **In maths** : if X (lies into a set Λ^1 of diffusion processes) solves a SDE such as : $dX(t)=b(t,X(t))dt+\sigma(t,X(t))dW(t)$
- With $X(0)=X_0$, $W(.)$ Brownian motion on $I(0,1)\times\mathbb{R}^d$ and σ s are Borel measurable functions (satisfying with b functions as well suitable bounding conditions)
- **AIM: to construct an operator of « derivation** D such that $DX=dX/dt \rightarrow$ **usual derivative** if X is a deterministic process
- D_+ and D_- operators left and right (as seen with d_+ and d_- above)
- **Complex operator** $D_k=(D_++D_-)/2 + ik(D_+-D_-)/2$, $k=1$ or -1
- Then for $f(t,x)$ in $C^{1,2}(I\times\mathbb{R}^d)$ and X in Λ^1 :
- $D_k f(t,X(t))=(dt(f)+D_k X(t).\text{grad}(f)+(i/2)a_{ij}d^2_{ij}f)(t,X(t))$
- $a_{ij}=(\sigma\sigma^*)_{ij}$, CP: $\sigma=\text{cte}$ (diffusion coefficient) $a_{ij}d^2_{ij}f \rightarrow \sigma^2 d^2_{ii}f$ (Laplacian)

5) Stochastic derivative (3)

- Schrodinger operator : L and NL
- For $Q=(X \text{ in } L^2/D_k^2(X)=-\text{grad}U(X(t)))$ in Newtonian case
- $\psi(t,x)=\exp(R/K+iS/K)(t,x)$, $K>0$ cte
- From $d'/dt=Dt$, $V^*=V_{\text{rond}}(\psi)=-2iK d_x \text{Ln}(\psi)$ (comes from v in $\text{grad}(S)/m$ in mechanics) then ψ obeys the following ENLS:
- $(iKdt \psi + K(K - \sigma^2)/2 (d_x \psi)^2 / \psi + (\sigma^2/2) d_{xx}^2 \psi = U\psi$
- CP : $K = \sigma^2$: ENLS $\rightarrow$ LNS :
- $i \sigma^2 dt \psi + (\sigma^4/2) d_{xx}^2 \psi = U \psi$

Passage à l'eq. de Schrodinger (cas A : EF)

RELATIVITE D'ECHELLE → MECANIQUE QUANTIQUE

Opérateur de dérivation covariante

$$\frac{d'}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V} \cdot \nabla - i\mathcal{D}\Delta$$

Equation fondamentale de la dynamique

$$\frac{d'\mathcal{V}}{dt} = -\nabla\phi$$

Changement de variables (S = action complexe) et intégration

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \mathcal{V}, t) dt \quad \psi = e^{iS/2m\mathcal{D}}$$

Equation de Schrödinger généralisée

$$\mathcal{D}^2 \Delta \psi + i\mathcal{D} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} \phi \psi = 0$$

Eq. de Schrodinger (suite)

Hamiltonien: forme covariante

$$\mathcal{P} = -iS_0 \nabla \ln \psi$$

$$\mathcal{P}\psi = -i\hbar \nabla \psi$$

$$\mathcal{L} = \frac{\hat{d}\mathcal{S}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \hat{\mathcal{V}} \cdot \nabla \mathcal{S}$$

$$\mathcal{P} = \nabla \mathcal{S}$$

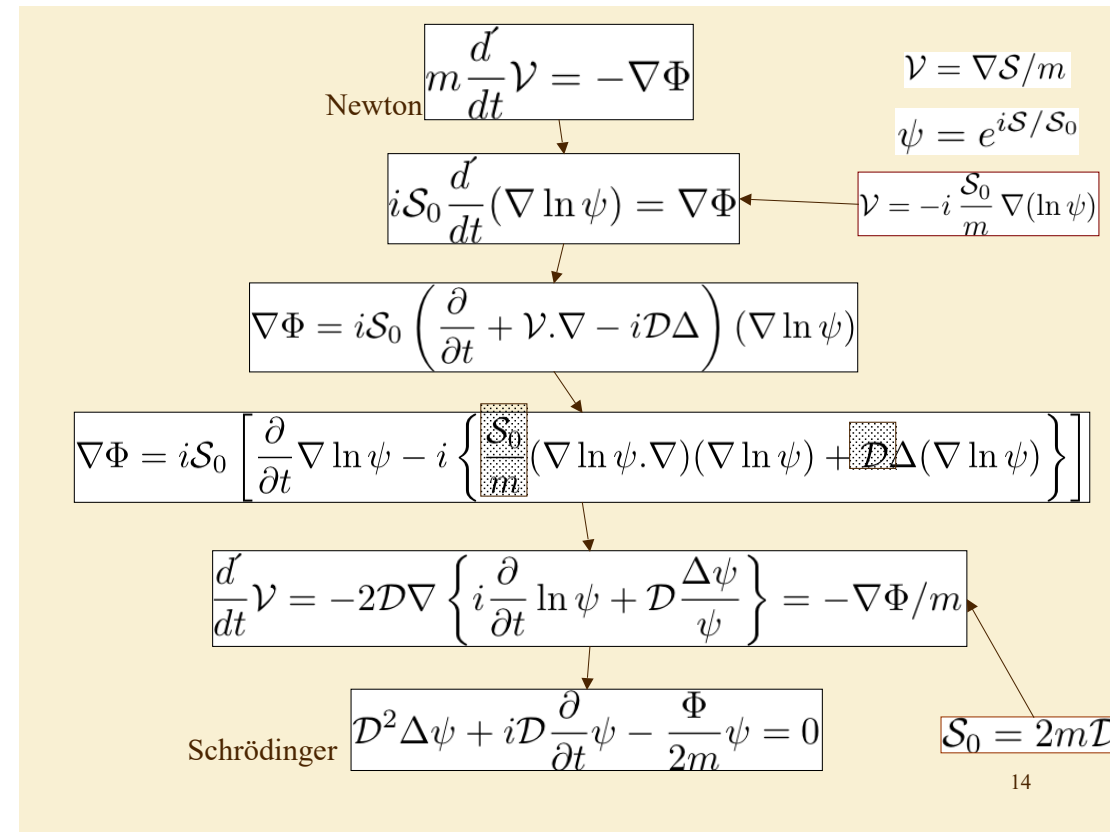
$$\mathcal{H} = -\partial \mathcal{S} / \partial t$$

$$\mathcal{H} = \hat{\mathcal{V}} \cdot \mathcal{P} - \mathcal{L}$$

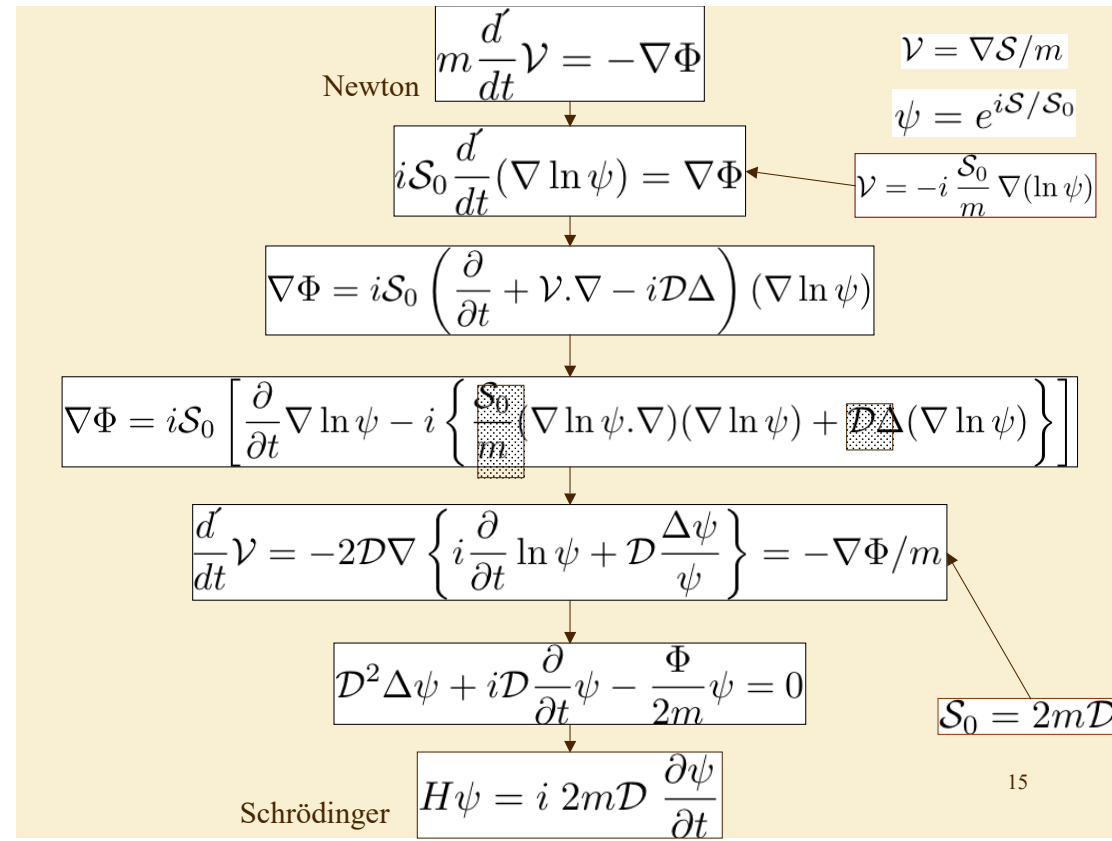
$$\longrightarrow \quad \mathcal{H} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{P} - i\mathcal{D} \nabla \cdot \mathcal{P} - \mathcal{L}$$

Il existe un terme d'énergie supplémentaire spécifique de la mécanique quantique: il est expliqué ici comme manifestation de la nondifférentiabilité et de la covariance forte

Eq. de Schrodinger (suite 2)



Eq. de Schrodinger (suite 2b)



Résumé : étapes pour la construction de la dérivée covariante
//RG...puis passage à Schrodinger (ici)

- Eq du mvt de Newton ou de NS (fluide): $ma = \text{Forces}$
- $d/dt(v) = \text{Forces}/m \rightarrow Dt(V^*) = \text{Forces}/m$
- Avec $d/dt \rightarrow Dt$ ($=d'/dt$) et $v \rightarrow V^*$ (vitesse complexe)
- Puis pour passer à Schrodinger: relation entre algèbre et géométrie
 $V^* = -2iDx \text{ grad}x(\text{Ln}(\Psi(x,t)))$
- Particule comme étant réseau de géodésiques virtuelles : mais 1 seule réalisée en expérience
- Cadre en maths //notion de dérivée stochastique **si pertinent?**

Conséquences de la RE en physique (suite, retour)

- Le côté nouveau de la RE (quand elle s'applique bien sûr) est la possibilité de faire de la MQ 'like' à un niveau macroscopique.
- Emergence du potentiel stochastique V_Q de la fractalité de l'ET (x,t)
- V_Q s'écrit dans **une version non relativiste** (relativiste connue) sous la forme suivante :
- $V_Q = -2D^2 \Delta(\rho^{1/2}) / \rho^{1/2}$, D coefficient de diffusion , ou $\Delta(\rho^{1/2}) / \rho^{1/2} = (\Delta(y) - \text{grad}(y)^2) / 2$; $y = \text{Ln}(\rho)$;
- $\rho = |\Psi|^2$ cf lien général entre densité de probabilité et densité de matière
- En MQ microscopique usuelle $D = \hbar / 2m$
 - Aussi la RE permet de transformer des équations non linéaires en équations de type Schrodinger linéaires, d'où la possibilité de résoudre des pbs qui sont bloqués par ailleurs puis longtemps comme en turbulence (avec la notion qui émerge ici ' d'atome turbulent').

Différences entre MQ micro et macro-quantique

- En MQ standard microscopique il n'y a pas de limite (d'échelle) inférieure -> possible intrication et indiscernabilité

En MQ like macro : existence d'une échelle inférieure : c'est fractal jusqu'à une certaine échelle (et pas en dessous)

autres....

Remarque : en turbulence fluide c'est le milieu lui même qui devient fractal pas l'ET $(x,t \rightarrow v,t)$...

Construction de la dérivée covariante, résumé cas relativiste , cas B) ETF

Résultats dans le cas B) Espace-Temps Fractal (ETF)

Démarche identique que en A) ici pour l'obtention des eqs de Pauli, de Klein-Gordon et de Dirac

l'équation de Dirac en RE vue comme une géodésique de nature relativiste obtenue si dans l'ETF(x,t) on applique la bonne dérivée covariante , quantique et relativiste.

Ex : Dirac Ref citée de MNC&LN : λ_c longueur de Compton = $\hbar/mc$

$$V_{c,\mu} = V_\mu + i\lambda_c/2 \partial_\mu \quad (I)$$

The quantum-covariant derivative operator for relativistic motion is :

$$d^{\wedge}/ds = V_\mu \partial_\mu + i\lambda_c/2 \partial_\mu \partial^\mu$$

The quantum covariance can be implemented by means of Eq(I), but now with a bi-quaternionic 4-velocity.

-Qqs conséquences de la RE en maths

- Description des ETF...
- (Déms initiales de LN /à rappeler si utile)
- Notamment sur la fractalité induite par la non différentiabilité :
- Conséquences sur les géodésiques et trajectoires fractales , fonctions explicitement dépendantes de la résolution (finie) ...
- Etablissement/construction de la dérivée covariante avec opérateur de type de Schrodinger (une CN ici est d'avoir le dédoublement de v)
- Notion de dérivée d'une fonction fractale (au sens de généraliser la dérivée ordinaire)
- (à citer déms de JC +autres connues)
- Nécessité de certains outils déjà disponibles ou bien restant encore à élaborer...

Remarques/maths

- Le cas de géodésiques à $Df=2$ semble générique (en tout cas le plus simple) pour fonder une eq de Schrodinger standard , mais avec d'autres pcs on pourrait avoir par ex un opérateur différent et une eq avec par ex un terme de Laplacien fractionnaire etc...
- Ecriture de pcs de type martingale : partie déterministe et partie stochastique esc tjs additif? (pourrait être un produit ; ou un mixte + et x ou bien encore autres?)
- Construction de pcs de type Browniens différents à G et a D en tout point (EN, J Wirth) par ex avec le Brownien multi-fractionnaire.

Ce que l'on peut conjecturer/utile ou admis pour applications pratiques effectives

- Parties vues : $Df=2$ le cas le plus simple, est ce le plus générique?
- Dédoublment de v dans un ETF (cf autres pcs...)
- RE comme sous-branche de l'analyse idempotente en maths :

pbs NL $\rightarrow$ pbs L

Synthèse discussion /maths de la RE (1)

- Ce qui a été démontré (par LN) :
- Théorème de base qui s'applique à tout (pas seulement aux fonctions) continuité + abandon de la différentiabilité $\rightarrow$ fractalité (pté secondaire, pas une hypothèse)
- Conséquence par ex une fonction $f(t)$ (de ETF $\rightarrow$ ETF?) devient explicitement dépendante de la résolution de la mesure soit δt : $f(t, \delta t)$, de même
- $f(x, t) \rightarrow f(x, \delta x, t, \delta t)$, la résolution (mesure) va rester finie (non nulle)

Synthèse discussion /maths de la RE (2)

- Nature de $ETF(x,t, \text{fractal})$? : pb ouvert, cf contraintes ou non a priori ; comment décrire un ETF , ou un ET cc et non différentiable.
- Nécessité du dédoublement de la dérivée en t (et/ou en x dans une direction donnée) dans le cas fractal :
- **Cas usuel** : Si on veut définir la vitesse v par $v=dx/dt$ à partir d'un point x_0 il faut avoir un second point x_1 placé avant (en t) ou après x_0 d'où $vd=\lim_{dt \rightarrow 0} (x(t+dt)-x(t))/dt$, $vg=\lim_{dt \rightarrow 0} (x(t)-x(t-dt))/dt$; les limites peuvent exister ou non, et si on par ex on a un point anguleux on aura vd qui diffère de vg (finies)
- **Cas fractal** : cette fois ici $x(t,\delta t)$, **mais δt est une variable indépendante de t**
- Cf Notion de dérivée d'une fonction fractale/cas usuel : $(f(t+\delta t, \delta t)-f(t, \delta t))/\delta t$
- Cf prendre la $\langle \rangle$ d'un processus :à quelle échelle?? Il faut admettre ? l'existence de 2 pcs séparés qui dépendent tous les 2 de l'échelle...
- Autre cas plus complexe évoqué : traitement pour le cas 'doublement fractal' pour $x(t(\delta t), \delta t)$ et étudier sa dérivée éventuelle plus en détail
- + encore un dédoublement possible? avec s abscisse curviligne

Synthèse discussion /maths de la RE (3)

- Pcs (stochastiques) induits par l'ETF (?)
- Argument hyperdiffusif pour justifier $Df=2$; car en MQ cela se comporte ainsi...(cf limité au mvt Brownien ou pas)
- Licité de la décomposition de type (semi)martingale ou non...avec tjs partie dét +partie stochastique
- Relation algébrique entre v^* (complexe dédoublée) et la fonction d'onde (c'est le principe de correspondance : à montrer)
- Potentiel Q qui émerge/bilan d'énergie
- (Nature de la fonction d'onde ; cas micro et cas macro...)

Synthèse /RE

Relativité d'échelle : structure de la théorie		
Lois d'échelle (lois de transformation dans l'espace des échelles)	Dynamique induite dans l'espace standard	Couplage* échelle-mouvement
« Galiléennes » $D_T=2$ Relativité d'échelle restreinte Relativité d'échelle généralisée* Lois quantiques dans l'espace des échelles	Mécanique quantique standard Mécaniques quantiques généralisées	Champs de jauge abéliens et non-abéliens

Pbs ouverts /dont en maths

- La description générale d'un espace temps continu mais non différentiable reste encore bien ouverte et reste (trop?) difficile.
- Rappel : quel traitement si effets de courbure et de fractalité comparables (gravité quantique)
- Lien Groupe de Renormalisation /physique statistique
- Construction de la RG d'échelle :difficultés car tenseur de tenseur si chgt de coordonnées pour les résolutions, et répercussion de ceci dans l'espace des positions
- Pouvoir mieux expliciter les liens possibles entre ETF et ETE(F)(éch)

ANNEXE : $/Df=2$ en (v,t) puis en (x,t) : Extrait papier : Macroscopic quantum-like behavior of a turbulent jet (LN, TL, soumis) :
 FRACTALITY OF TURBULENT TRAJECTORIES AT LARGE SCALES
 Transition from fractal trajectories in velocity space to trajectories in position-space

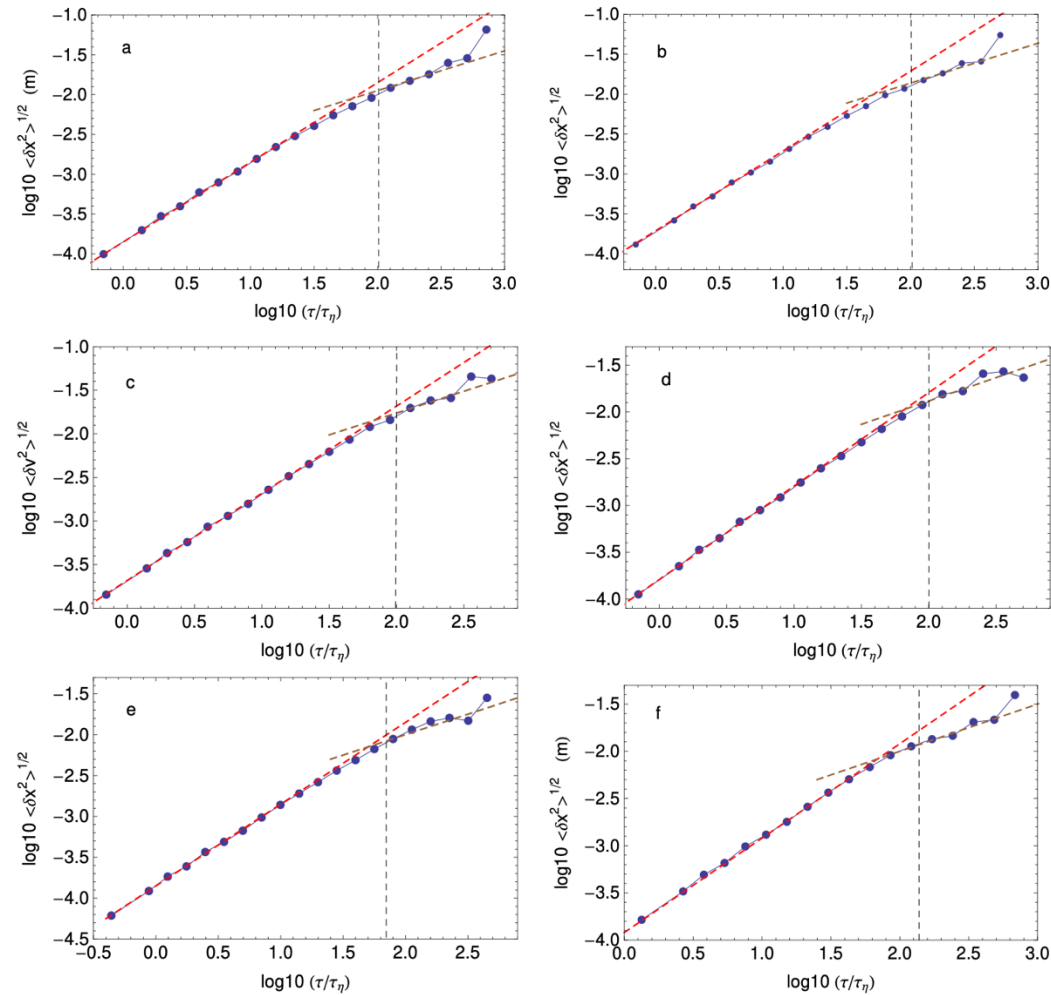


Figure 1: Experimentally observed scale transition between the standard classical regime

Comment on fig 1 +scaling

- Figure 1: Experimentally observed scale transition between the standard classical regime $\delta x \sim \delta t$ and a (possibly transitory) fractal dimension 2 regime $\delta x \sim \delta t^{1/2}$ in long segments of Mordant's experiments [11, 12, 13, 14]. Man29 (#3, $R\lambda = 810$, $TL = 0.0224$ s, $\tau\eta = 0.00022$ s, $\log_{10}(TL/\tau\eta) = 2.01$): Seg3398 (figure a, duration 26 TL), Seg8009 (b, 16.7 TL), Seg1135 (c, 15.2 TL), Seg2578 (d, 15.2 TL); Man02 (#2, $R\lambda = 570$, $TL = 0.0467$ s, $\tau\eta = 0.00063$ s, $\log_{10}(TL/\tau\eta) = 1.87$): Seg3583 (e, 11.2 TL); Man22 (#3, $R\lambda = 1000$, $TL = 0.0147$ s, $\tau\eta = 0.00011$ s, $\log_{10}(TL/\tau\eta) = 2.13$): Seg536 (f, 17.5 TL). The dashed vertical lines indicate the integral time-scale TL, around which the transition occurs.

manip N Mordant turbulence (2D trajectories)

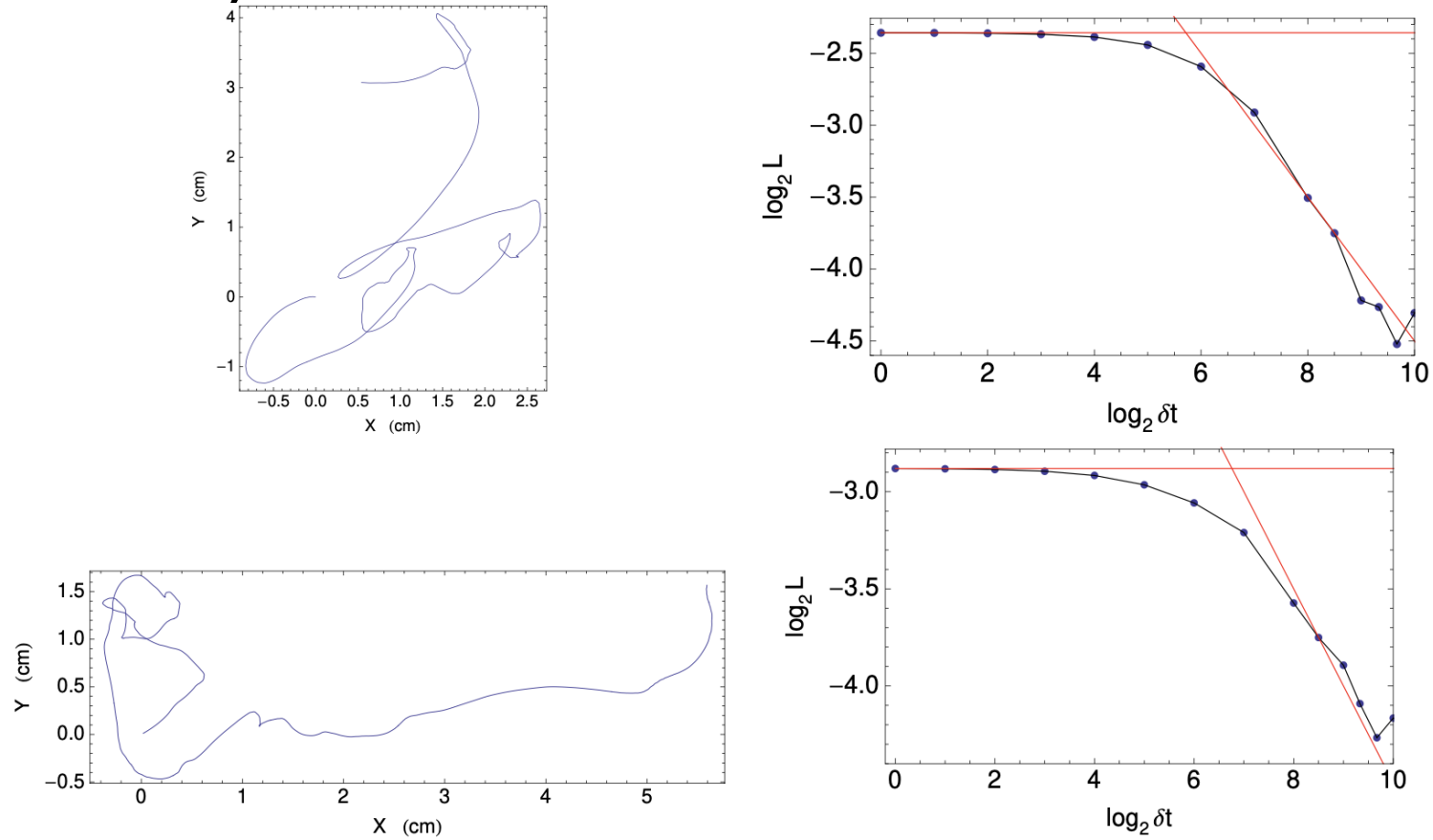


Figure 2: Two examples of long 2D trajectories in Mordant's data [14] with measurements of

Comment on fig 2.

- Figure 2: Two examples of long 2D trajectories in Mordant's data [14] with measurements of their fractal dimension. The left figures show the trajectories and the right figures their length in function of time-scale. A transition occurs around TL from non-fractality at small scales (length independent of scale) to dimension 2 fractality at large scales ($L \sim \delta t^{-1/2}$). Up figure: Seg2D3583, duration 1346 $t_u = 9.2$ TL (with $t_u = 1/6500$ s and $TL = 146 t_u$) and full length $L_{tot} = 19.5$ cm = 4.3 L. Down figure: Seg2D1684, duration 1293 $t_u = 8.9$ TL and full length $L_{tot} = 13.6$ cm = 3.0 L.

Manip en jet turbulent de M Bourgoin et al/fig 4

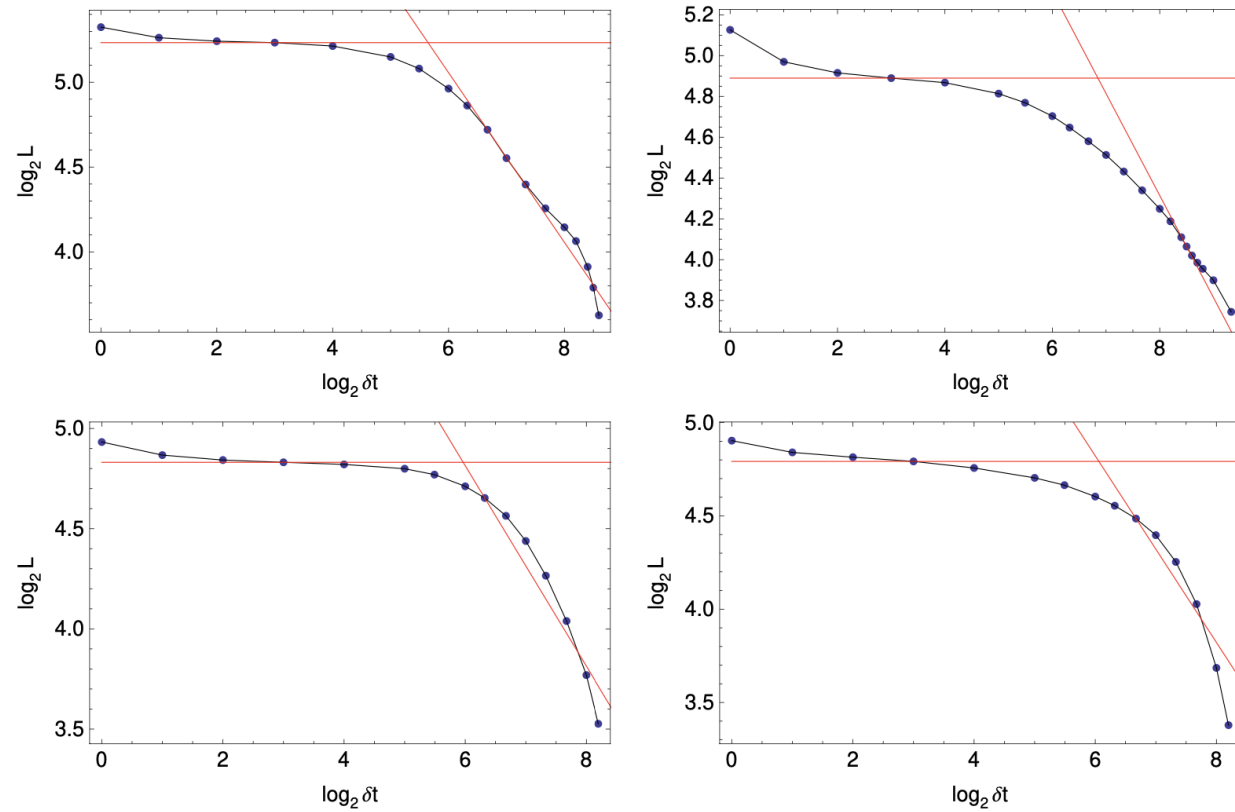


Figure 4: Four examples of fractal dimension measurements on free turbulent jet trajectories

Comment on fig 4

- Figure 4: Four examples of fractal dimension measurements on free turbulent jet trajectories (JETseg 1207, 1732, 1284 and 1796 in our available sample from Viggiano et al. [18] measurements). In all cases the trajectory is non-fractal at small scales $\delta t < TL$, then shows a transition toward fractal dimension 2 (red line of slope $-1/2$) around time-scales $25.5 - 26.5 = (45 - 90) tu$ which correspond to $\approx 2TL$ to $4TL$. At time-scales which approach the trajectory duration the measurements become affected by a finite size bias and the slope falls artificially below $-1/2$ toward slope -1 .

Manip jet de MB suite +comment

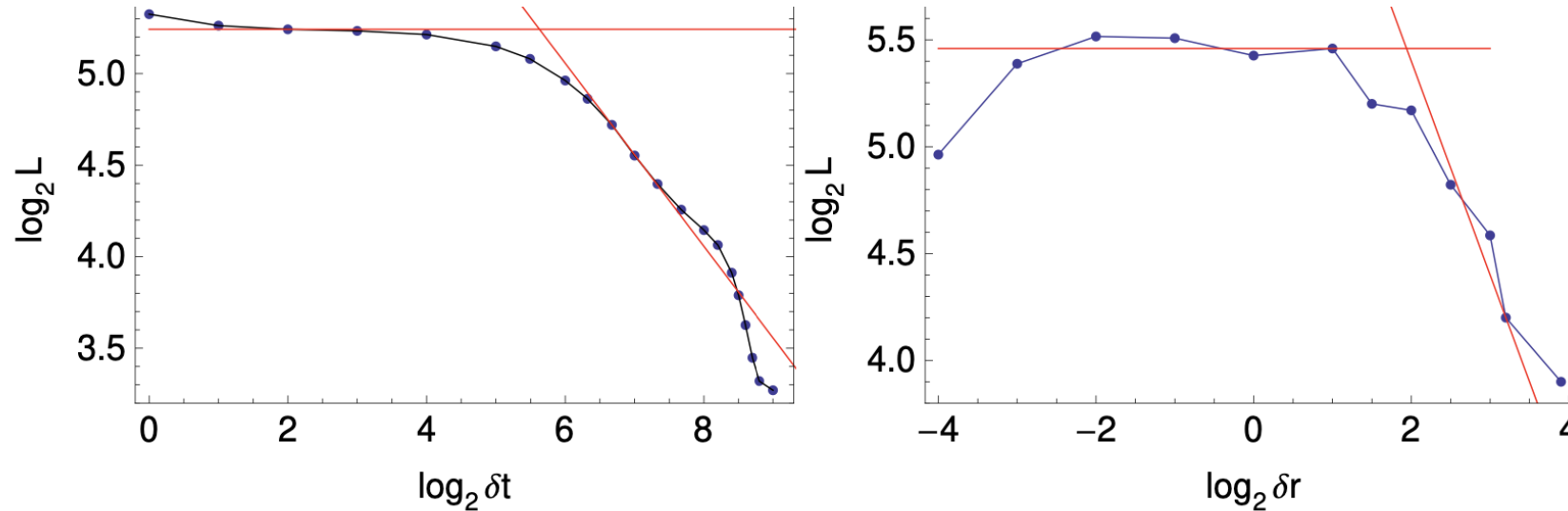


Figure 5: Measurement of fractal dimension by two methods for a turbulent jet trajectory (JETseg1207). The left figure is a 2D length measurement in function of time-resolution. The right figure is a measurement in function of space-resolution by the box counting method. Both methods yield the same result, namely, non-fractality at small scales followed by a transition to fractal dimension 2 at relatively large time-scales and large length-scales (slope $-1/2$ in left figure and -1 in right figure).

Annexe : études en maths lien avec SPDE, Mécanique stochastique...

- Etudes de EF (espace fractal) : géodésiques et pcs sur EF
- Construction /pcs des dérivées stochastiques associées : en espace plat, en espace courbe ...
- Etude des pcs sur un E(T)F? (pas seulement en RE pour le moment?)
- SPDE +PCS par ex :Martin Hairer
- PCS par ex : Jean Claude Zambrini

Ex de dérivée généralisée (de JCZ) (pcs)

5 Stochastic geodesics

We shall consider stochastic geodesics as processes which are critical points of some energy functional generalising the classical deterministic one. Since the stochastic processes, diffusions on the manifold, are no longer differentiable in time, some notion of generalised velocity has to replace the usual time derivative.

If $\xi(\cdot)$ is a semimartingale with respect to an increasing filtration $\mathcal{P}_t$, $t \in [0, T]$ and with values in a manifold M , we consider the process η defined by the Stratonovich integral

$$\eta(t) := \int_0^t t_{0 \leftarrow s}^\xi \circ d\xi(s)$$

This is a semimartingale taking values in $T_{\xi(0)}(M)$. We consider its (generalised) right-hand time derivative (or drift) by taking conditional expectations:

$$D_t \eta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E^{\mathcal{P}_t} \left[\frac{\eta(t + \varepsilon) - \eta(t)}{\varepsilon} \right]$$

Notice that if ξ is a differentiable deterministic path, this notion of derivative reduces to the usual one.

Then we define the *generalised (forward) derivative*

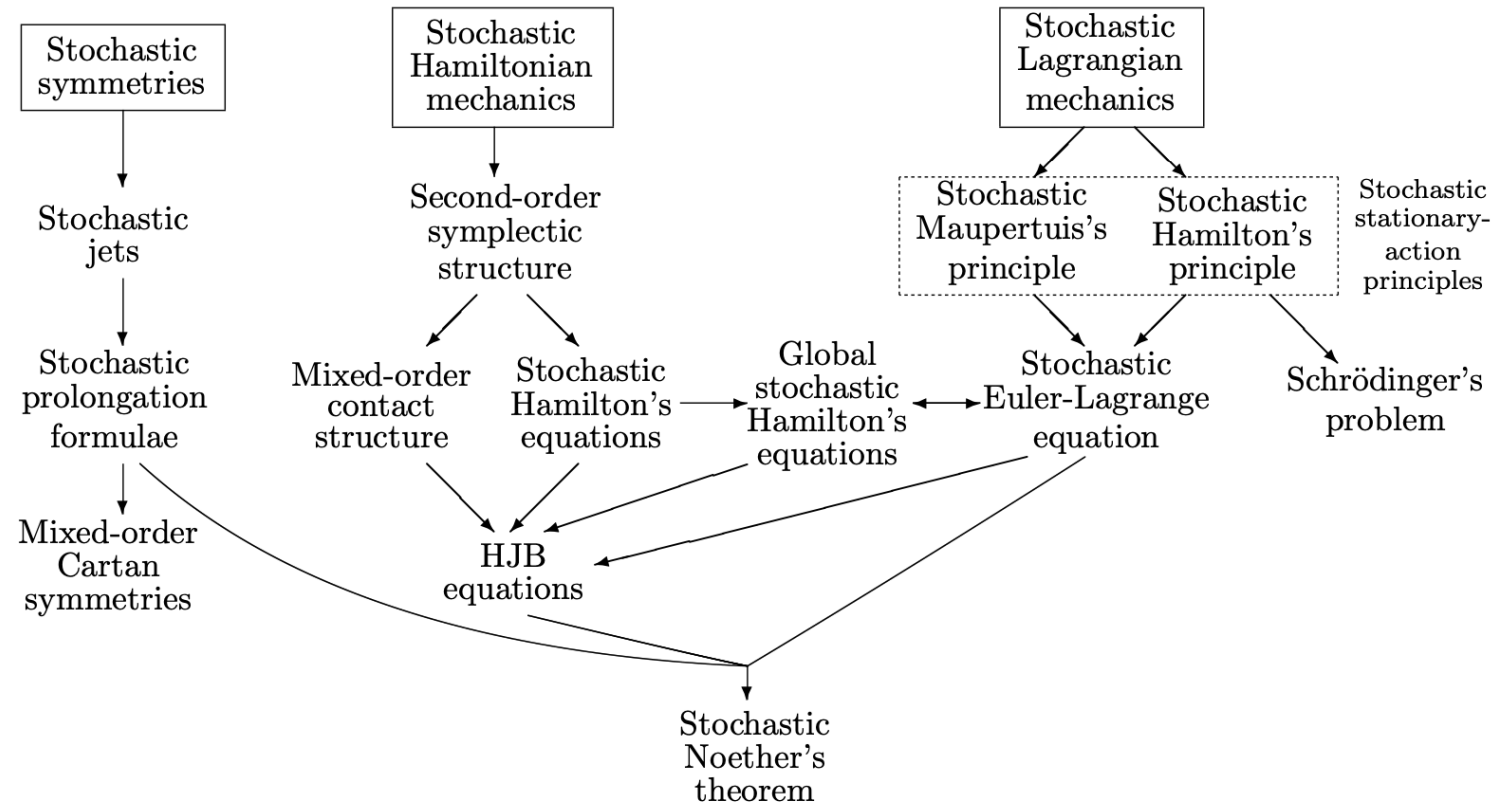
$$D_t^\nabla \xi(t) := t_{t \leftarrow 0} D_t \eta(t) \tag{12}$$

We use the symbol ∇ to stress that the derivative depends on the choice of covariant derivative used to define the parallel transport, although in this work we are only consider the Levi-Civita covariant derivative.

For a (possibly time dependent) vector field Z computed along a semimartingale ξ , the generalised derivative is defined as

$$D_t^\nabla Z(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E^{\mathcal{P}_t} [t_{t \leftarrow t + \varepsilon} Z(t + \varepsilon, \xi(t + \varepsilon)) - Z(t, \xi(t))]$$

Stochastics mechanics (JCZ)



Annexe: quantification stochastique (G Parisi et coll)

Definition of a stochastic variable: an object X defined by a set of possible values x (its 'range' or 'sample space') and a probability distribution $P(x)$ over this set. Here for cc pcs, one defines the probability density as non-negative $P(x) \geq 0$; and normalized $\int P(x) dx = 1$

We allow generally for P being defined in the sense of tempered distributions. The probability that X has a value between x and $x + dx$ is given by $P(x) dx$.

If X is a well-defined stochastic variable (sv), any quantity function $Y=f(X)$ will be also a well defined sv.

Definition of a stochastic process : $Y(t) = f(t, X)$ as simply a function of the time and of a stochastic variable X , expectation value for Y : $\langle Y(t) \rangle = \int Yx(t)P(x) dx$.

$Yx(t)$ is obtained by inserting for X one of its possible values x : $Yx(t)=f(t,x)$, Y is a sample function or realization of the stochastic process.

For a scalar field ϕ : the basic idea of stochastic quantization is to consider the Euclidean path integral measure $\exp\{-(1/\hbar_b) S_E\} \int D\phi \exp\{-(1/\hbar_b) S_E\}$ as the stationary distribution of a stochastic process, where S_E is the euclidian action.

// Feynman path integral method (generalization)

Annexe: maths

Processus de Bernstein (cas non markovien)

de JCZ : « L'intégrale de Feynman utilise une diffusion (malheureusement inexistante) dont la densité de probabilité est un produit de " Ψ " et Ψ^* . Ce produit est l'expression de la propriété de Markov. Mais l'idée des intégrales de chemin est en effet plus générale. Les diffusions "de Bernstein" que j'utilise, et aussi proches que possible des Feynmaniennes, sont rigoureuses). Bernstein probabiliste a expliqué qualitativement, un an après le papier de Schrödinger, comment les construire en termes presque "mécaniques". Or ces processus ne sont rien d'autre que des champs quantiques (au sens moderne) en une dimension et sur un intervalle de temps, en général, fini. En particulier, ils peuvent très bien être non-Markoviens en cas de mélange comme on le fait pour des mélanges décrits par des matrices densités en quantique.

J'ai considéré (avec Nicolas Privault) des processus de Lévy (à sauts, associés formellement en quantique par Feynman à la représentation des impulsions). Ils sont bien définis et suivent de la même stratégie de Bernstein. »

Annexe: maths sur Bernstein pcs

A Bernstein process z , is satisfying the stochastic differential equation:

$$dz(t) = \theta dw(t) + \tilde{B}(t, z(t))dt$$

relatively to the canonical increasing filtration of the brownian w , and the stochastic differential equation

$$d^*z(t) = \theta d^*w^*(t) + \tilde{B}^*(t, z(t))dt$$

relatively to the canonical decreasing filtration of another brownian w^*

+ de details dans arxiv.org/pdf/2210.17383 : JC Zambrini et al

Annexe: maths autre

Livre de M. Agop sur « Mathematical principles of scale relativity physics » , CRC Press

Dérivation à l'ordre 3 (au lieu de l'ordre 2) (dont pour $D_f=2...$)

L'opérateur de dérivation fractal est à nouveau : $D_t = d/dt = (d_+ + d_-)/2dt + i(d_+ - d_-)/2dt$

Pour V complexe (du au dédoublement) on a :

Dans le cas Markov : (formule plus complexe disponible dans le cas non Markov) la géodésique équation est ainsi :

$$D_t(V) = dV/dt = \partial_t V + (V \cdot \nabla)V - i(\lambda^2 / \tau) (dt/\tau)^{(2/D_f - 1)} \nabla^2 V \\ + (2/3) \lambda^3 / \tau (dt/\tau)^{(3/D_f - 1)} \nabla^3 V = 0$$

CP : $D_f=2...$

This equation shows that at any point of a fractal path, the local acceleration $\partial_t V$, the convection $(V \cdot \nabla)V$, the dissipation term in $\lambda^2...$ and the dispersion one in $\lambda^3...$ are in a sort of equilibrium.

Voir le rôle supplémentaire du terme d'ordre 3 dispersif ...

Annexe/option: calcul diff dans l'ETE...(réf LN)...dynamique d'échelle

Dynamique d'échelle: équations

Lois d'échelle solutions d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre dans l'espace des échelles



« djinn » (dimension d'échelle variable) identifié comme un « temps d'échelle » δ

Resolution identifiée comme une « vitesse d'échelle »:

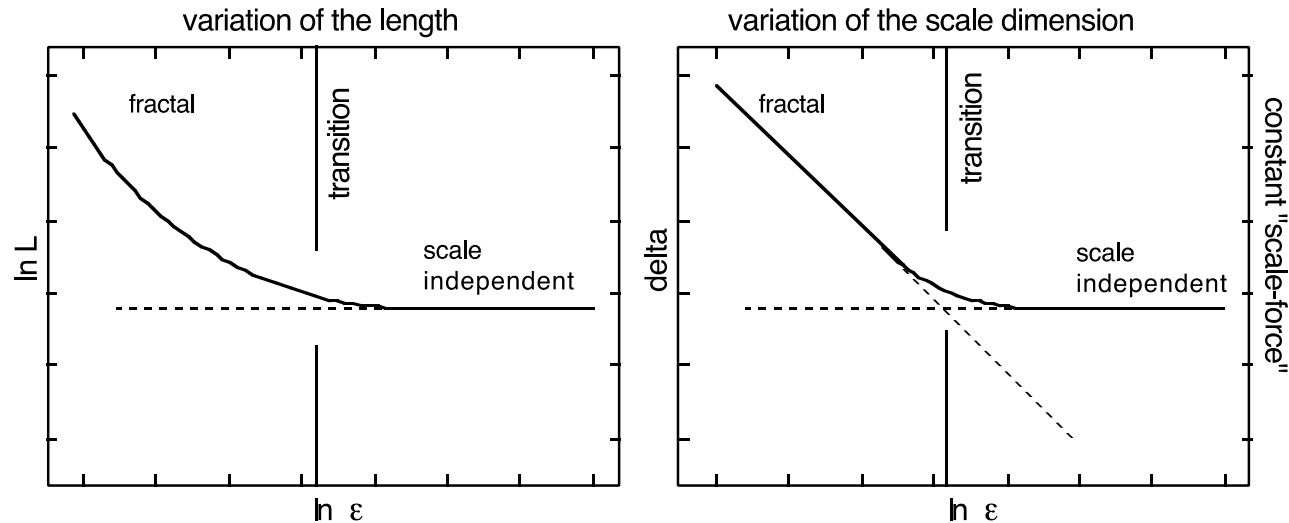
$$\ln \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) = \frac{d \ln \mathcal{L}}{d\delta}$$

Principe de moindre action dans l'espace des échelles —>
équations d'échelle d'Euler Lagrange en fonction du « djinn »:

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \frac{\partial L}{\partial \ln \varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial \ln \mathcal{L}}$$

Dynamique d'échelle: force d'échelle constante

$$\ln \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0} \right) = \frac{1}{2G} \ln^2 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \quad \delta = \frac{1}{G} \ln \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \quad (\text{asymptotique})$$

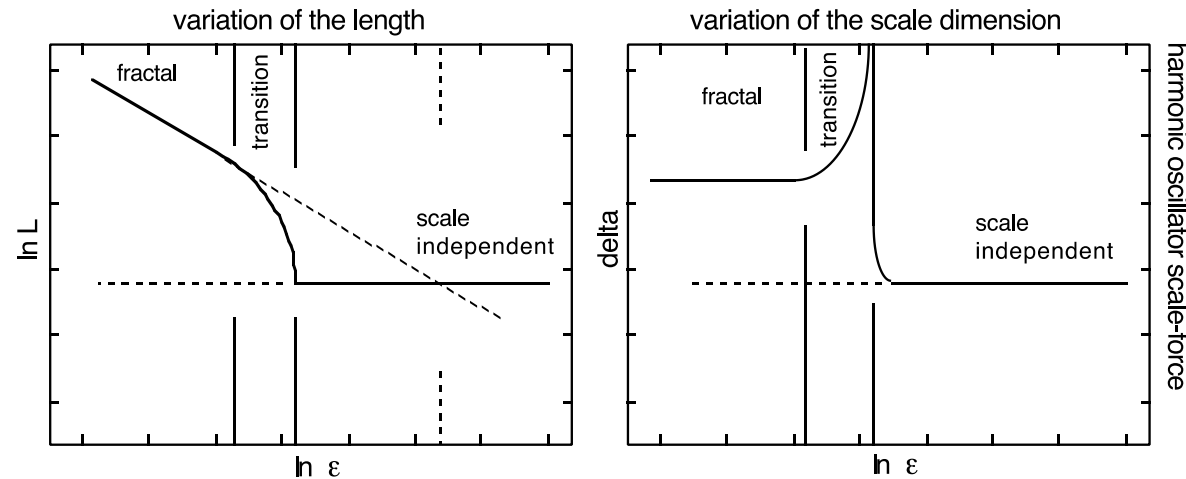


Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective dans le cas d'une 'force d'échelle' constante:

$$\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d\delta^2} = G$$

Dynamique d'échelle: oscillateur harmonique

$$\ln \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0} = \delta \sqrt{\ln^2 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{\delta^2}}$$



Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective dans le cas d'un potentiel d'oscillateur harmonique (dans l'espace des échelles)

$$\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d \delta^2} = \frac{1}{\delta_0^2} \ln \mathcal{L}$$

Loi log-périodique à partir de la covariance d'échelle

Généralisation « covariante d'échelle » des fractals à dimension constante:

1. Equation différentielle d'échelle, $D = \text{cste}$: $\frac{d\Phi}{d \ln \varepsilon} - D\Phi = 0$

2. Introduction d'une correction (2è membre): $\frac{d\Phi}{d \ln \varepsilon} - D\Phi = \chi$

3. Covariance = invariance de forme des équations—> on postule que les équations en Φ et χ ont la même forme: $\frac{d\chi}{d \ln \varepsilon} - D'\chi = 0$

4. On pose $D' = D + \delta$, l'éq. devient: $\frac{d^2\Phi}{(d \ln \varepsilon)^2} - B \frac{d\Phi}{d \ln \varepsilon} + C\Phi = 0$

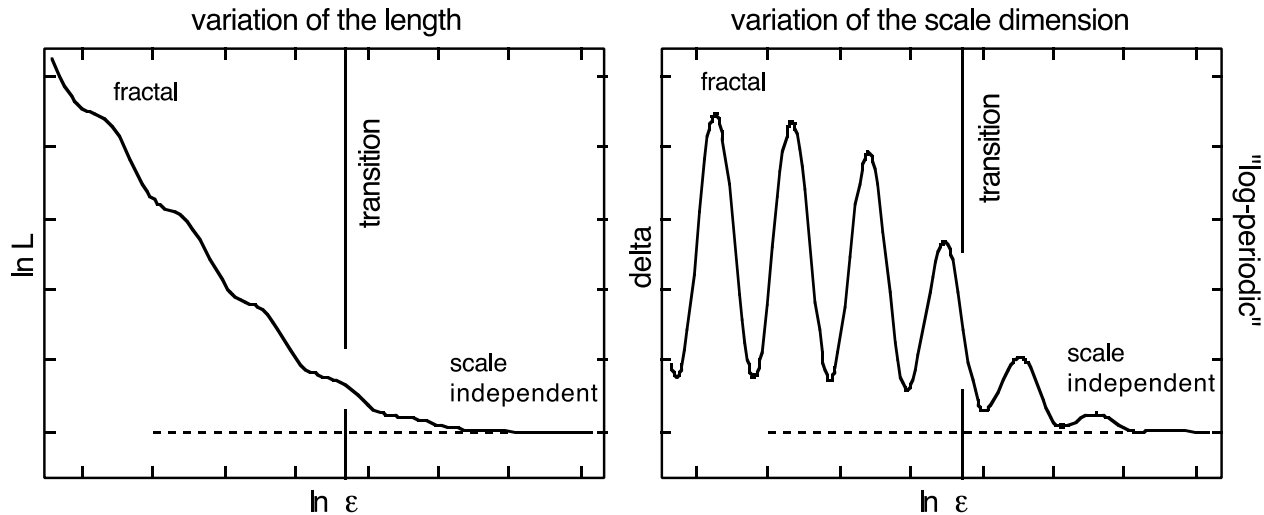
5. On pose $B = 2D + \delta$, $C = D(D + \delta)$
—> solution: $\Phi(\varepsilon) = a \varepsilon^D (1 + b\varepsilon^\delta)$

6. Cas part. $\delta = i\omega$ —>log-per. $\Phi(\varepsilon) = a\varepsilon^D [1 + b \cos(\omega \ln \varepsilon)]$

Loi log-périodique

$$\mathcal{L}(\varepsilon) = \mathcal{L}_0 [1 + (\lambda/\varepsilon)^\nu e^{b \cos(\omega \ln(\varepsilon/\lambda))}]$$

(Petites
fluctuations)



Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension
d'échelle effective dans le cas d'un comportement log-
périodique (invariance d'échelle discrète, exposant complexe)
avec transition fractal / nonfractal.