Réponse à l’énigme de la lettre 53

Nous commençons à nous douter de comment faire. En nous inspirant du problème précédent, nous savons que nous devons créer deux résonateurs accordés aux fréquences stipulées, soit 100,34 Hz et 124,43 Hz.

Arbitrairement nous pouvons fabriquer un résonateur avec un circuit RLC en prenant L=C, ce qui implique :

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{(L^2)}}=f_x \rightarrow L=\frac{1}{2\pi f_x}$$

Ayant déterminé l’inductance du résonateur, notre problème est de choisir une dissipation R pour chaque résonateur. La valeur de R est déterminée par la qualité :

$$\frac{L\,\omega}{R}=Q=\frac{\Delta f}{f}$$

Nous ne pouvons pas avoir une dissipation nulle, sans quoi la qualité est infinie ainsi que l’amplitude des résonances lorsque nous excitons les résonateurs. Comment dès lors normaliser notre fonction d’onde ? Et dès lors que nous définissons une dissipation, nos raies spectrale ne sont plus des impulsions de Dirac mais des raies plus ou moins évasées, pondérant ainsi la notion de discrétisation<?
>
 lorsque nous effectuons des mesures physiques. Posons typiquement Q = 100, d’où :

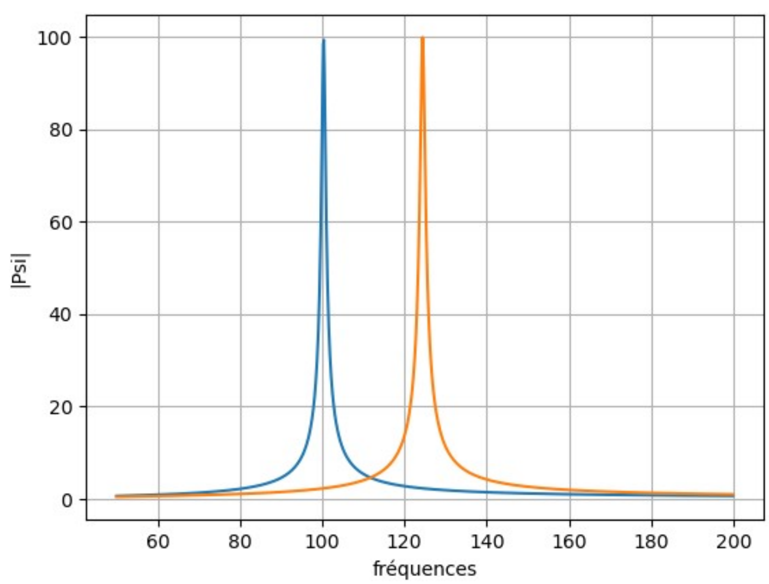
$$R_{100}=\frac{2\pi\cdot 100{,}34\cdot L_{100}}{100}, \quad R_{124}=\frac{2\pi\cdot 124{,}43\cdot L_{124}}{100}$$

Nous traçons cette fonction d’onde avec le programme suivant :

```
import numpy as np
import pylab as plt

F1 = 100.34
F2 = 124.43

L1 = 1./(2. * np.pi * F1)
L2 = 1./(2. * np.pi * F2)

R1 = 2. * np.pi * F1 * L1 / 100.
R2 = 2. * np.pi * F2 * L2 / 100.

N = 1000
fmin = 50.
fmax = 200.
df = (fmax - fmin)/N

psi = np.zeros((N, 2), dtype = complex)
```

```
axf = np.zeros(N, dtype = float)

for n in range(N):
    f = df * n + fmin
    w = 2. * np.pi * f
    s = 1J * w + 1E-8
    axf[n] = f
    #
    zeta = [[R1 + s*L1 + 1./(s*L1), 0.],\
            [0., R2 + s*L2 + 1./(s*L2)]]
    y = np.linalg.inv(zeta)
    T = [[1.], [1.]]
    #
    psi[n, :] = np.transpose(np.dot(y, T))


plt.plot(axf, abs(psi[:, 0]))
plt.plot(axf, abs(psi[:, 1]))
plt.grid(True)
plt.xlabel(u'fréquences')
plt.ylabel(u'|Psi|')
plt.show()
```

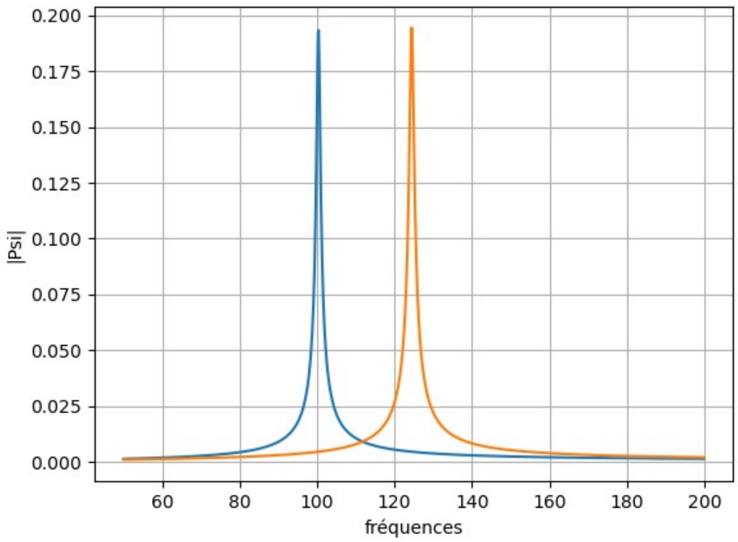
qui nous donne le spectre suivant :



L’allure répond déjà à ce que nous attendions. Il nous reste à normaliser. Nous voulons :

$$\int_f df\,|\psi|^2 = 1$$

En calculant le coefficient à appliquer à la fonction Ψ pour respecter cette somme nous trouvons 263788.8453194841 ! Donc en multipliant la source de Dirac par $\sqrt{(263788.8453194841)}$ nous devons trouver 1. Et effectivement, nous trouvons 1,000.. 15 zéros …. 7 !
Notre tracé devient alors :



Notre phonon a 40% de chance d'exciter le maximum de résonance de chaque corde. Ce résultat, suggère que notre qualité est sans doute un peu faible, et c'est le cas ! Nous devrions être plus proche de ½. Mais nous comprenons aussi qu'en mesure nous n'aurions pas deux parfaits Dirac, mais des raies comportant certaines largeurs traduisant le bruit indissociable de la mesure et traduisant des conditions d'excitation plus complexes, non incluses dans un modèle parfaitement discret et la présence toujours d'un spectre continu pouvant provenir des moyens de mesure (manque de résolution, …) ou aussi du bruit ambiant. En pratique les qualités sont plutôt de l'ordre de 10^4 ou plus encore. La figure suivante montre un exemple de spectre mesuré et de rapport raie / bruit.