Solution :

La solution à ce problème n'est pas si triviale qu'elle pourrait paraître.

Nous pouvons prendre des coefficients qui soient des propagateurs purs donc de la forme $e^{-j\omega d}$. Le carré de leurs modules est donc bien égal à 1 et ce sont les seuls termes de ces deux colonnes. Comme le problème est symétrique en distance il faut finalement jouer sur la hauteur y de telle façon que le carré du module de la fonction résultante soit nul :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-j\omega x}{c}}e^{\frac{-j\omega x}{c}}+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-j\omega\sqrt{x^2+y^2}}{c}}e^{\frac{-j\omega\sqrt{x^2+y^2}}{c}}\right|^2=0$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme :

$$e^{\frac{-2j\omega x}{c}}+e^{\frac{-2j\omega x}{c}\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}=0$$

Si nous prenons y assez petit devant x nous avons :

$$\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\approx 1+\frac{y^2}{2x^2}$$

Notre problème s'écrit alors :

$$e^{\frac{-2j\omega x}{c}}\left(1+e^{\frac{2j\omega x}{c}\frac{y^2}{2x^2}}\right)=0$$

Il suffit alors de vérifier (car $\exp(jn\pi)$ avec n impair vaut -1) :

$$\frac{\omega y^2}{cx}=n\pi\Rightarrow y=\sqrt{\frac{cxn\pi}{\omega}}$$

n est un entier impair et correspond aux modes de la lumière pour lesquels la statuette sera dans le noir. Au contraire pour les valeurs paires, elle sera mieux éclairée !

En calculant $\gamma\gamma T$ nous trouvons alors un vecteur d'onde d'intensité nulle sur le quatrième point, c'est-à-dire une probabilité nulle de trouver de la lumière en ce point sous cette condition.

Mais pour que la statuette entre entièrement dans la pénombre il faut qu'elle soit en fait de l'épaisseur d'une feuille de papier, car dès que nous nous écartons un peu de la condition ci-dessus, nous retrouvons une condition de lumière où les ondes se construisent au lieu de se détruire comme ici par effet de retard de propagation, et il faut aussi qu'elle ne soit pas trop profonde. Bref c'est une statuette un peu bizarre ! Mais aujourd'hui nous saurions faire une expérience assez « bluffante » avec des lasers et une bonne distance, pour que le pinceau soit de quelques centimètres de diamètre.