Dans le cadre de son Groupe de Travail sur
"La régénération des grandes entreprises"
(responsable : P. Marchand)

CONFERENCE A F C E T

(Association Française des Sciences et Techniques de l'Information et des Systèmes)
156 Bd. PEREIRE - 75 017 PARIS - Métro : Pereire
Tél. 47 66 24 19

MARDI 21 NOVEMBRE 1995 - 17 H 30 -

PROPOS et REFLEXIONS sur "LES LOIS DU CHAOS" (I. Prigogine)

par Mr. François DUBOIS

PROFESSEUR DE MATHEMATIQUES.
CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS
et ECOLE POLYTECHNIQUE

Conférence AFCET

mardi 21 novembre 1995

Propos et réflexions sur "les lois du chaos" (I. Prigogine).

François Dubois

1) L'auteur et l'ouvrage.

2) Que retenir des neuf chapitres?

3) Ce que j'en pense.

1) L'auteur et l'ouvrage

- Ilya Prigogine
  né à Moscou (1917)
  Prix Nobel de chimie (1977)
  Université libre de Bruxelles.

- Travaux : thermodynamique des phénomènes irréversibles

- ouvrages

* P. Non equilibrium statistical mechanics, Wiley, New York, 1961

* Glansdorff & P. Structure, stabilité, fluctuations Masson, Paris, 1971

* P & I. Stengers la nouvelle alliance Gallimard, Paris, 1979.

---

le livre : "les lois du chaos"
flammarion 1994, Laterza (Rome) 1993
* 126 pages
* Deux conférences données à Milan en 1992
"suggérer plutôt que démontrer".

- Idée force du livre :

[pour avoir un modèle simple du chaos, il faut abandonner la notion de trajectoire.

- Les autres ouvrages (consultés) traitant du sujet :

* Arnold - Avez. Problèmes ergodiques de la mécanique classique ; Gauthier Villars, Paris, 1967

* Bergé - Pomeau - Vidal. L'ordre dans le chaos ; vers une approche déterministe de la turbulence ; Hermann, Paris, 1984

* Guckenheimer - Holmes. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields ; Springer Verlag, New York, 1983

* Ekeland. Le calcul, l'imprévu ; les figures du temps de Kepler à Thom ; Seuil, Paris, 1984.

* H. Laborit. La nouvelle grille ; R. Laffont, 1974.

2) Que retenir des neuf chapitres ?

Les titres sont proposés par F.D.

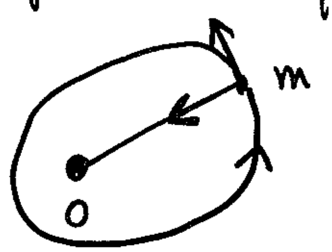
1) philosophie
2) le problème du temps
3) monde microscopique
4) théorie spectrale
5) Retour à Poincaré
6) Univers quantique
7) Vers la sociologie
8) Chaos et mécanique quantique
9) Conclusions générales.

• ch 1 Philosophie

* le chaos n'est-il pas par définition imprévisible ?

* approche classique : déterminisme ; temps réversible.

cf Newton : équations différentielles ordinaires.



$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = - K \frac{Mm}{|r|^2} \frac{r}{|r|} .$$

et conditions initiales.

* chaos : lois de probabilité ; irréversibilité.

* le chaos est toujours la conséquence d'instabilités. les trajectoires au départ voisines divergent

o exemple : <u>décalage de Bernoulli</u>

$$x = 0,13567139\ldots$$
$$Ux = 0,3567139\ldots$$

on multiplie x par 10 et on ne garde que ce qui est entre 0 et 1.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{10^k} \quad \hookrightarrow \quad Ux = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k+1}}{10^k}$$

* Que se passe-t-il si on part de deux nombres x et y égaux jusqu'à la 40° décimale ?

* Comparer Ux, Uy ; U^2x, U^2y ; … ; U^kx, U^ky, …

o restent voisins jusqu'à la 40° itération du décalage U, puis s'éloignent l'un de l'autre de façon aléatoire puisque les décimales suivantes sont différentes.

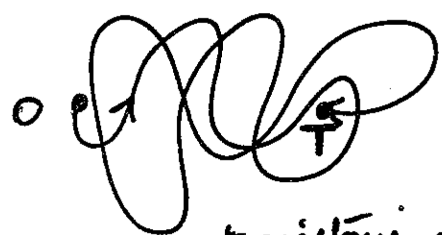
* K. Popper : " le problème central à la base de la dichotomie entre les deux cultures (sciences naturelles déterministes, sces humaines fondées sur l'incertitude et le choix) est le problème du temps.

* fin XIX° prise de conscience du paradoxe
gravitation / électromagnétisme
Thermodynamique = science de l'âge industriel.
résurgence (1960 - 1980)
solution (I. Prigogine ?!)

• ch 2. Le problème du temps.

* Boltzmann (1872) Comprendre la flèche du temps thermodynamique à l'aide d'une description microscopique.

• Hypothèse ergodique de Boltzmann-Gibbs.



trajectoire complexe. $x = \varphi_t x_0$.

Valeur moyenne de la fonction f sur la trajectoire

$$f^*(x_0) = \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t x_0)\, dt.$$

hyp ergodique: on peut remplacer cette moyenne temporelle par une moyenne spatiale $\bar{f}$

Pour un système ergodique, la moyenne temporelle ne dépend pas du point initial x_0.

• Les moyennes ont un comportement irréversible

* • L'irréversibilité serait due à notre ignorance

* Résurgence du problème du temps

{ nouvelle vision de l'Europe? événements de l'Est?
nous sentons que nous sommes dans une période de bifurcation. }

* Structures dissipatives en interaction
Thermodynamique des systèmes ouverts
↳ autorisent le développement de la complexité
chimie, biologie, reproduction, cerveau, etc...?

* ex Ville : car une structure dissipative en interaction avec la campagne qui l'entoure

* Trop d'ordre? cristaux → mort
pas de dissipation d'énergie

• Dissipation d'énergie.
Dissous d'entropie. L'énergie se conserve toujours. Par contre elle peut être "ordonnée" (cinétique, électricité, gravitation) ou "désordonnée" (chaleur). L'entropie d'un système désordonné est plus grande que celle d'un système ordonné.

* Découverte expérimentale récente (1990):
structures de Turing (1952)
Structures périodiques stationnaires (ordonnées) dont les paramètres (mailles) sont liés aux phénomènes irréversibles (coefficient de diffusion, temps de réaction chimique).

* I.P : contradiction entre
  - l'irréversibilité est due à notre ignorance [regarder des moyennes].
  - structures de Turing.

→ réécrire les lois de la dynamique.

Ch3. Le monde microscopique.

* Sir J. Lighthill (1986) : "la mécanique newtonienne a amené les mécaniciens à des généralisations dans le domaine de la prédicibilité que l'on sait aujourd'hui fausses".

- Théorème KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser, 1960)
  ↳ compliqué ; voir JC Yoccoz !

- Attracteur de Lorenz (1963).
  modèle d'atmosphère le plus simple possible
  trois équations différentielles couplées

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Py - Pz \\ \dfrac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

$P = 10,\ b = 8/3,\ r = 28.$

dynamique non linéaire très riche
dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales ("effet papillon").
$t \to \infty$. des trajectoires s'accumulent sur un "attracteur étrange".

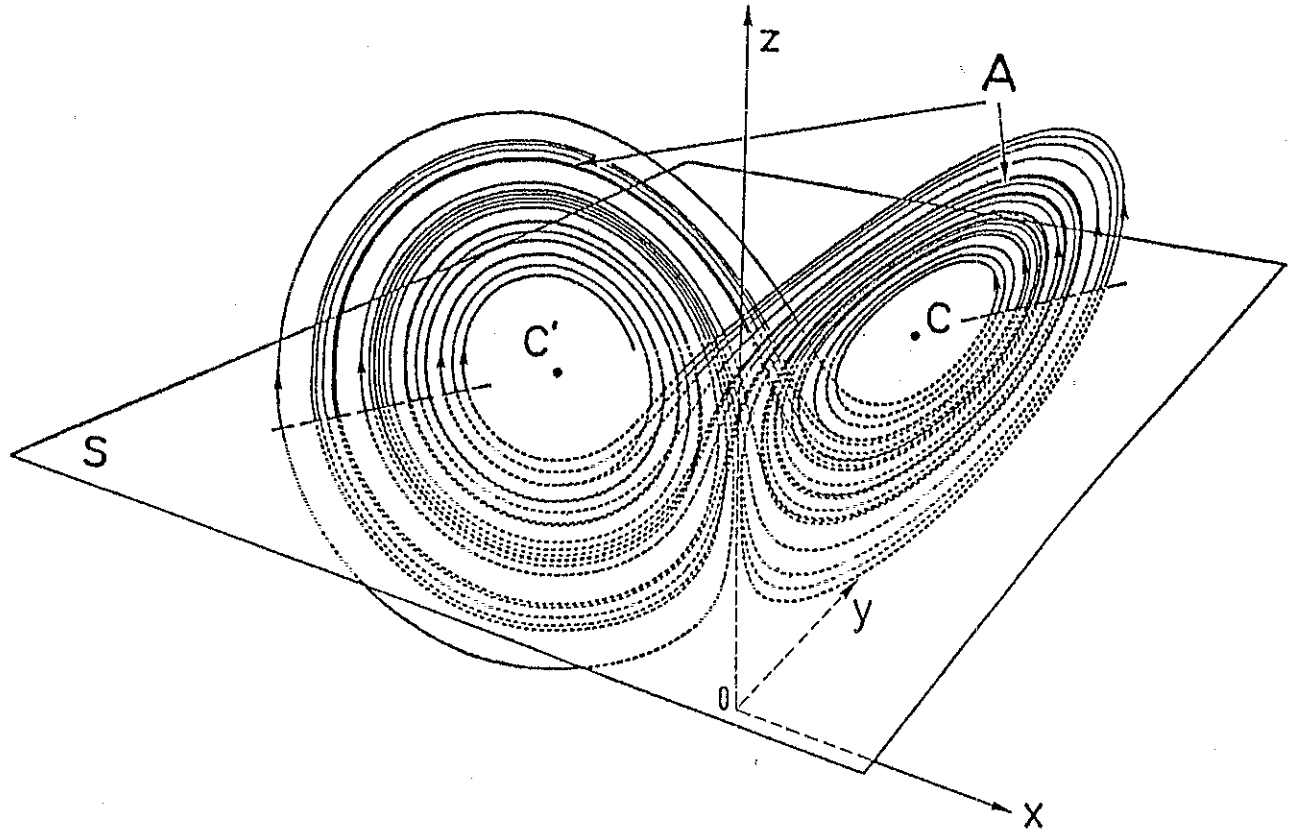


Figure VI.14.

Vue de l'attracteur de Lorenz pour $r = 28$.
On notera l'effet de perspective qui pourrait faire croire à tort à une dissymétrie de l'attracteur (d'après O. Lanford). Les deux segments pointillés repèrent les intersections des trajectoires et du plan de coupe S (de cote $z = r - 1 = 27$) avec la condition $\dot{Z} > 0$, c'est-à-dire la section de Poincaré de l'attracteur par ce plan.

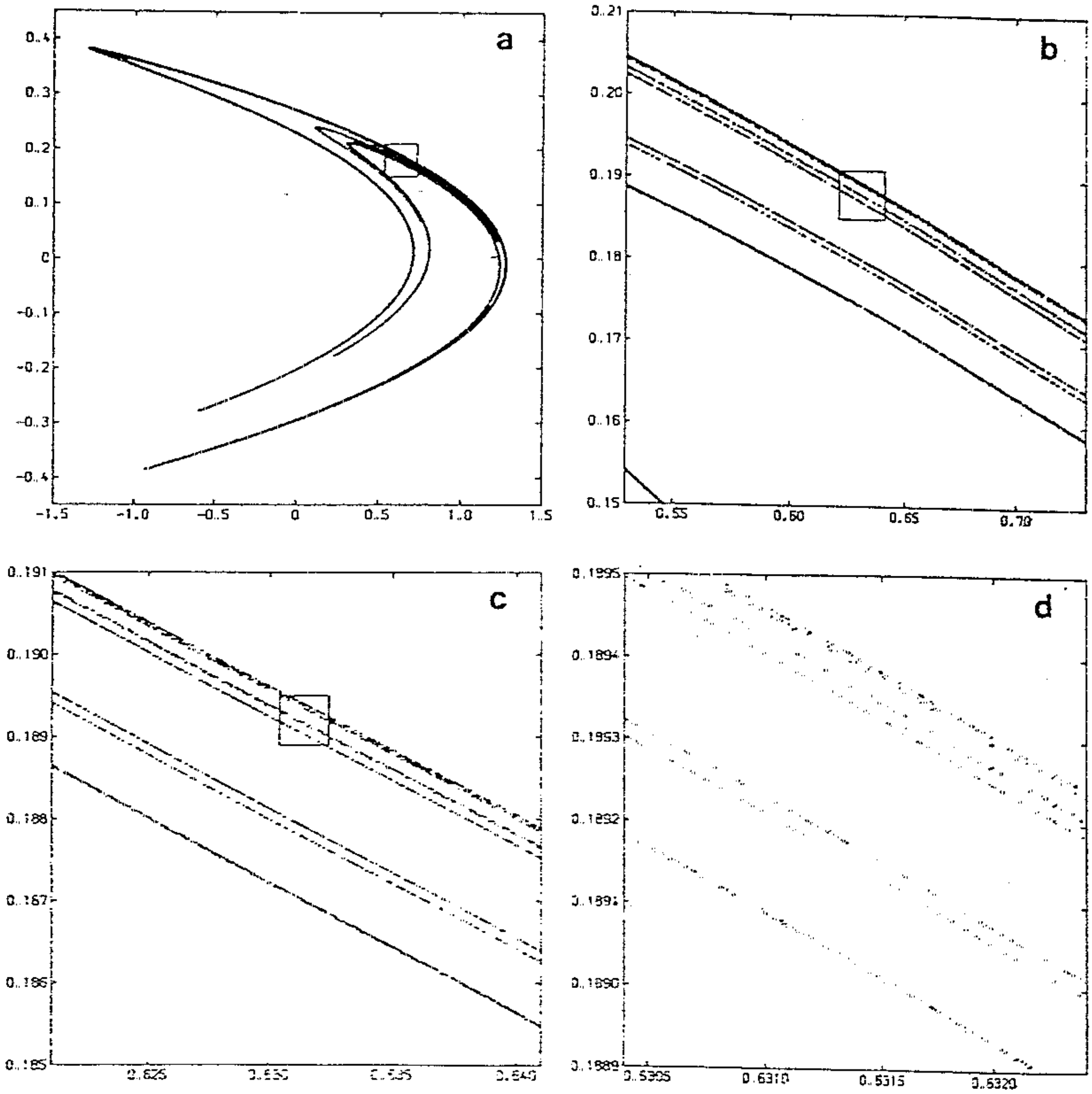


Figure VI.21.

Illustration de la permanence de la structure de l'attracteur de Hénon à différentes échelles.
Des agrandissements successifs sont effectués transformant l'encadré d'une figure en la figure suivante, et ainsi de suite (remarquer les changements d'échelles sur les axes).

$$(a) \to (b) \to (c) \to (d) .$$

D'après M. Hénon.

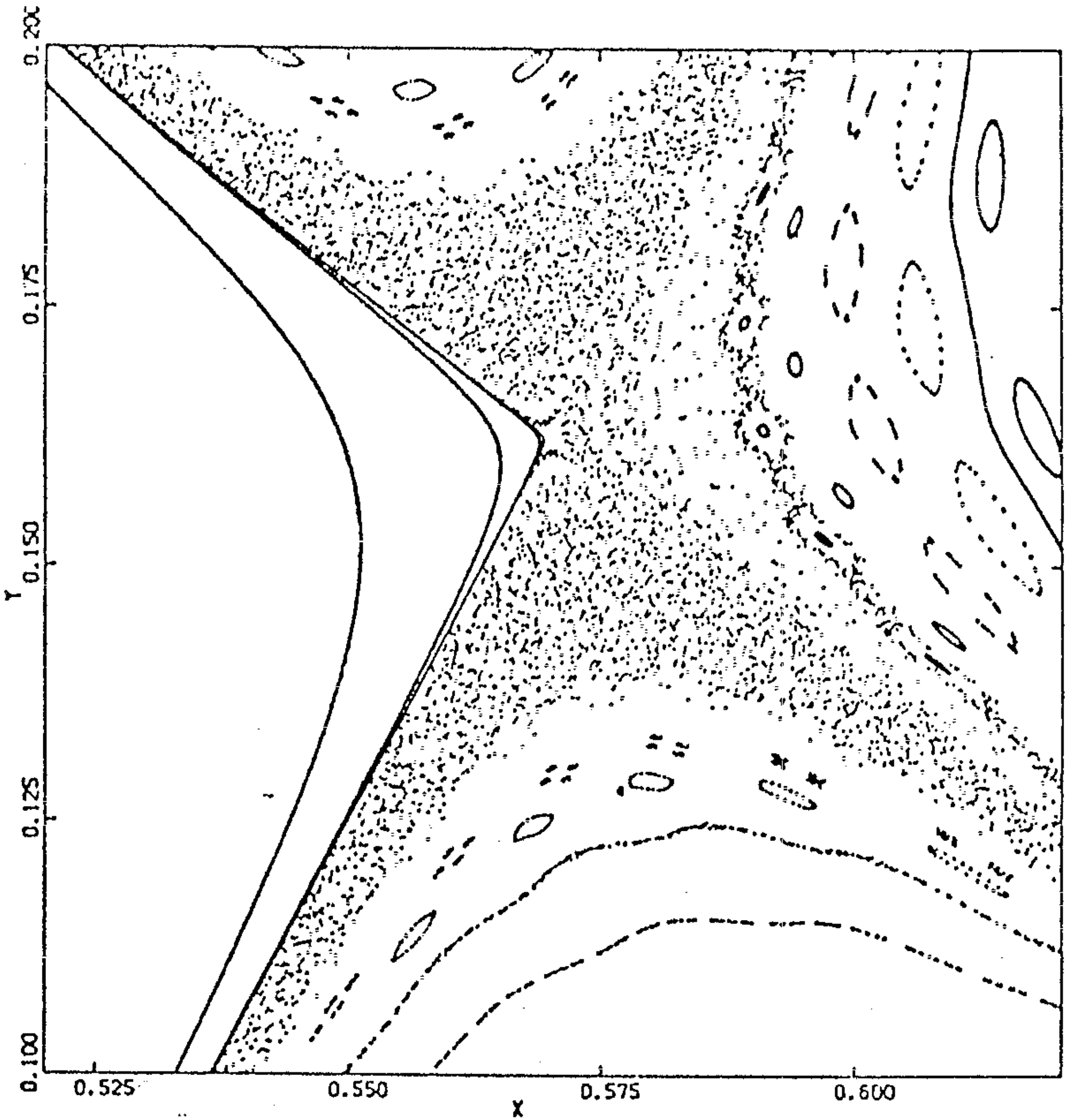


Figure 17. Agrandissement de la région avoisinant le point C_2 de la figure 16. Les points représentés appartiennent à une seule trajectoire. On remarquera l'apparition d'une structure fine faite d'îlots d'ordre entourés d'une mer chaotique (*source* : voir figure 16).

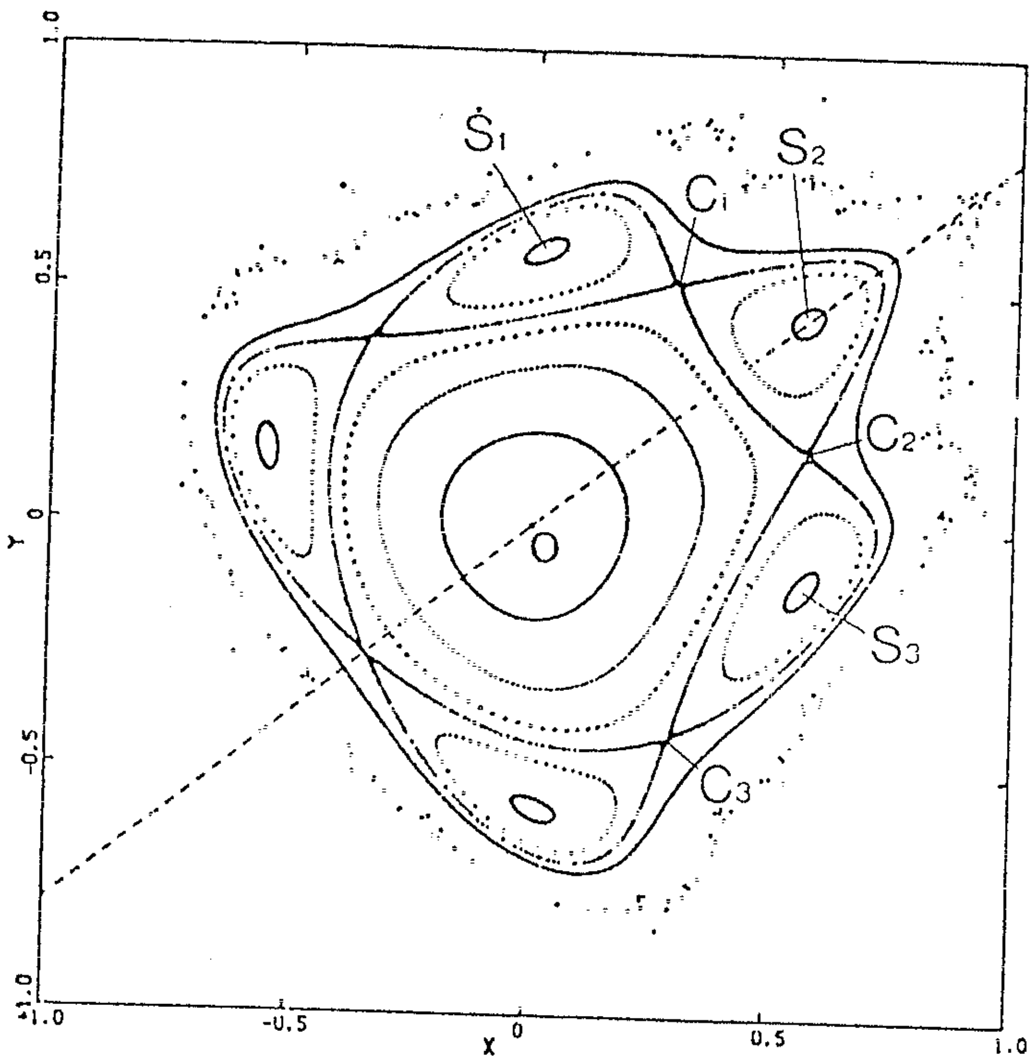


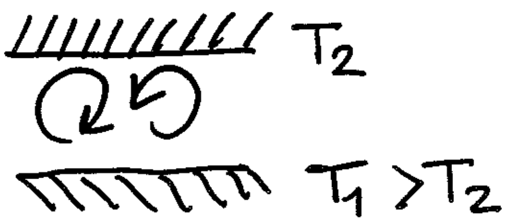
Figure 16. Cette figure a été tracée sur ordinateur à partir des formules de Hénon. Elle semble séparer nettement une région intérieure où règne la régularité d'une région extérieure où les trajectoires paraissent aléatoires. Mais cela n'est qu'apparence, comme le montre la figure suivante (d'après *Topics in Nonlinear Dynamics, a Tribute to Sir Edward Bullard*, New York, American Institute of Physics, 1978).

- **Théorème de Ruelle-Takens (1971).**

Le chaos (au sens de la non-prédictibilité induite par une petite perturbation des conditions initiales qui s'amplifie exponentiellement) peut apparaître pour des systèmes d'équations différentielles déterministes non linéaires comportant (seulement) trois équations.

- **Expériences (Libchaber, 1978).**

transition vers la turbulence en mécanique des fluides → convection de Rayleigh-Benard.



$T_1 = T_2 + \Delta T$

* $\Delta T < \Delta T_c$ diffusion; pas de mouvement
* $\Delta T_c < \Delta T < \Delta T_c^1$ rouleaux de convection pour le transport de la chaleur
  → mouvement périodique → fréquence f_1
* $\Delta T_c^1 < \Delta T < \Delta T_c^2$
  Les rouleaux de convection commencent à osciller → 2° fréquence f_2; $f_1/f_2 \neq n/m$.
  mouvement quasi-périodique.
* $\Delta T_c^2 < \Delta T$: 3° fréquence dans le spectre f_3, $f_3 \neq$ harmonique formé avec f_1 et f_2.

Le spectre de la fluctuation de la température devient continu
→ "bruit blanc" → chaos.

* Temps de Lyapunov

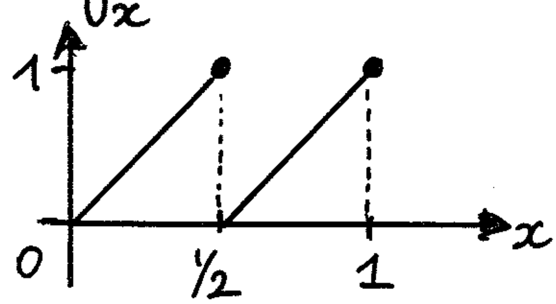
$$(\delta x)_n = (\delta x)_0 \exp(\lambda n)$$

$\frac{1}{\lambda}$ = temps de Lyapunov {exposants de Lyapunov?}
$\longrightarrow$ perte de mémoire de la condition initiale

* Décalage de Bernoulli en base 2.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k 2^{-k} \longrightarrow Ux = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k+1} 2^{-k}.$$

$Ux = 2x$ (modulo 1)



Si X est une variable aléatoire répartie avec la densité $\rho(x)$
(X appartient à l'intervalle $[x, x+\delta x[$ avec la probabilité $\rho(x)\,\delta x$), alors
UX est répartie avec la densité $U\rho(x)$. On a :

$$U\rho(x) = \frac{1}{2}\left\{ \rho\left(\frac{x}{2}\right) + \rho\left(\frac{1+x}{2}\right) \right\}$$

* $\rho(x) = \delta(x - x_0)$ X est en x_0 avec la probabilité 1, on retrouve dans ce cas la notion de trajectoire, i.e. suivre le mouvement (les itérés par U) de <u>un</u> seul point.

Exemple 2.3. Transformation du boulanger.

M est le tore $\{ (x, y) \text{ mod. } 1 \}$ muni de la mesure $dx\,dy$.

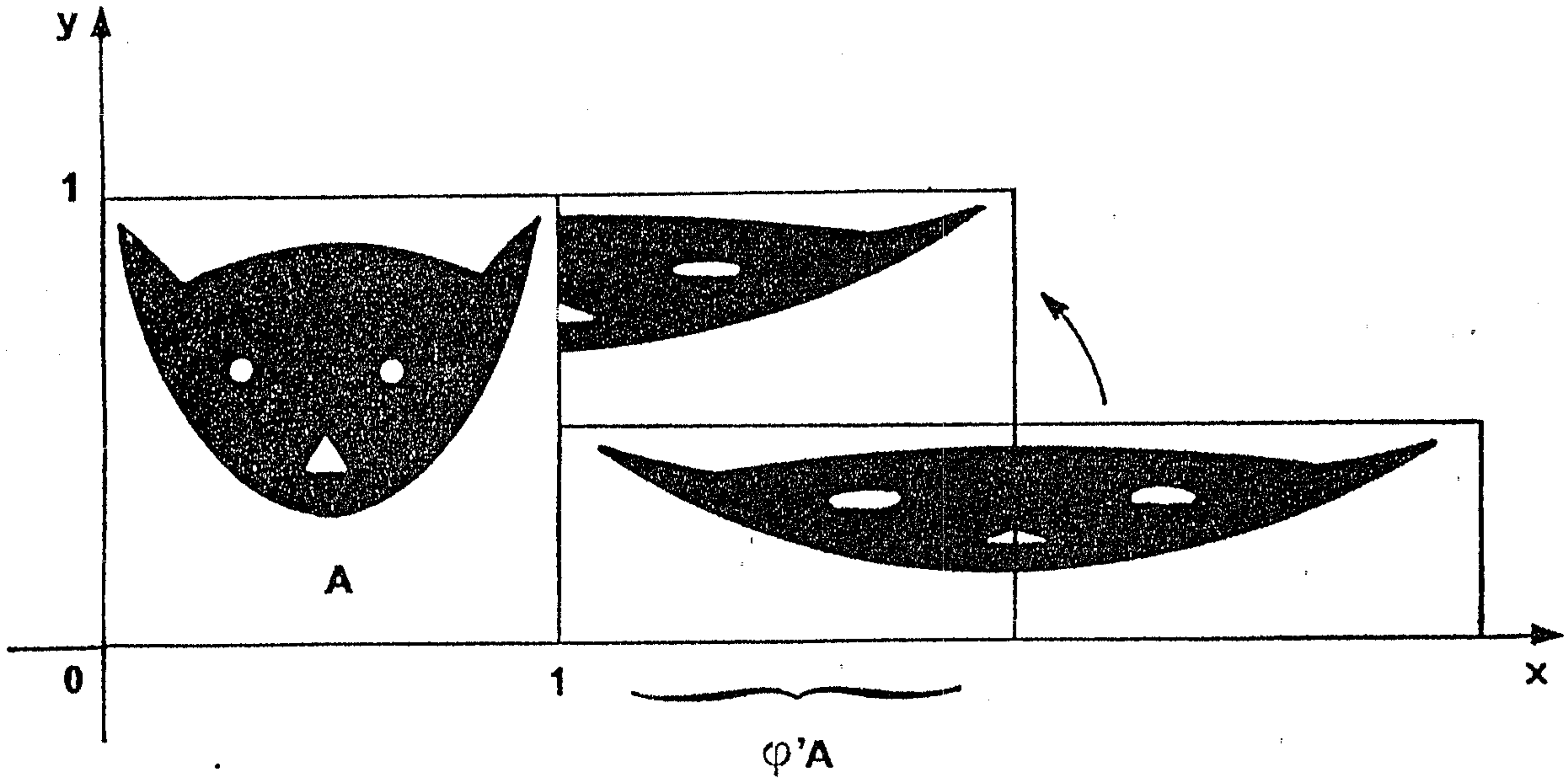


Figure 2-4.

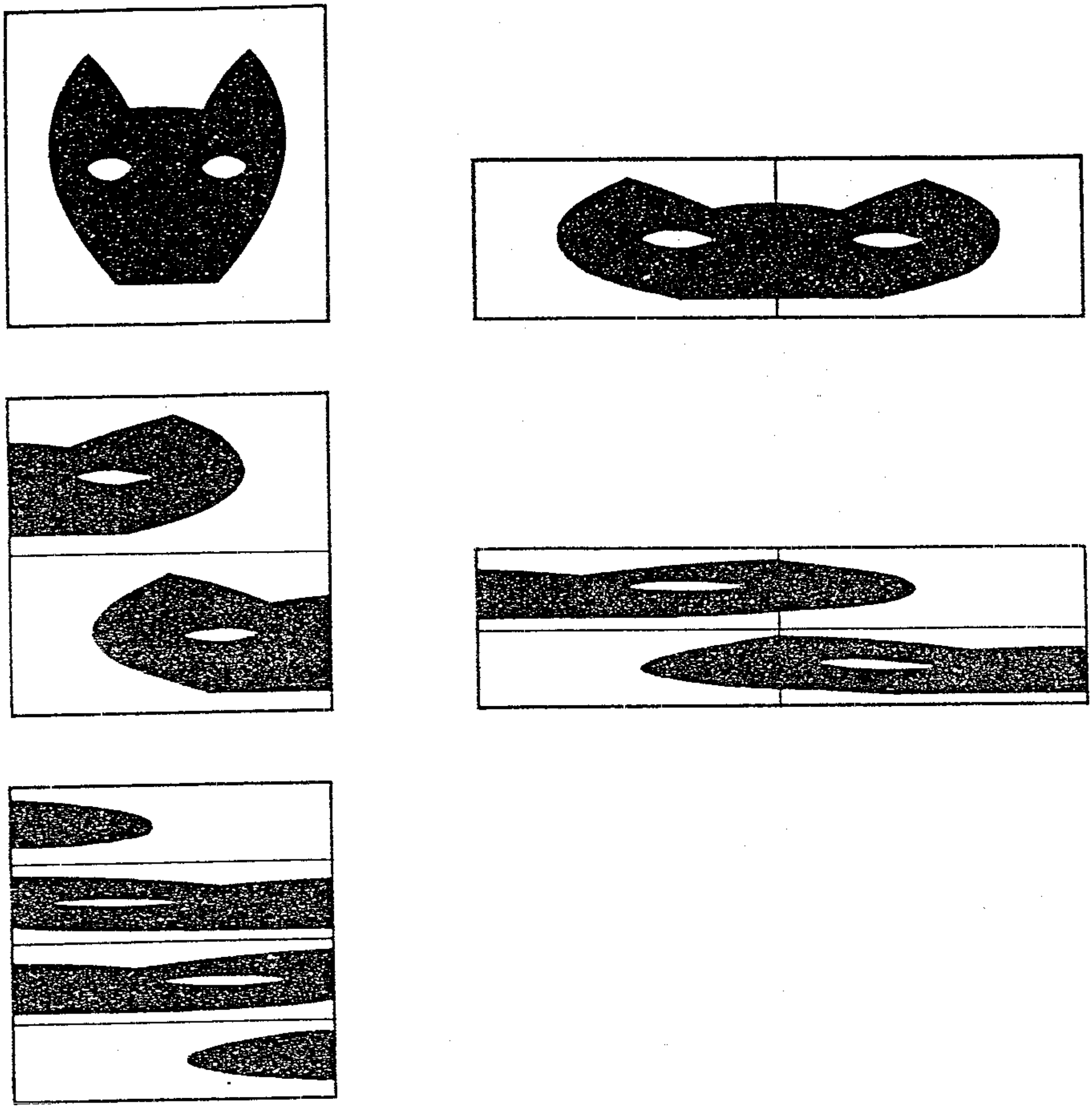


Figure 18. Le chat d'Arnold.

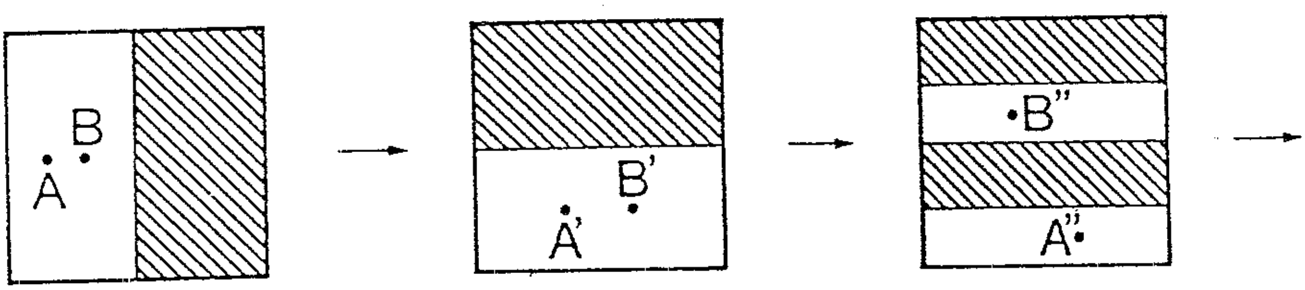


Figure 19. La transformation du boulanger. On a indiqué les transformés successifs de A et B.

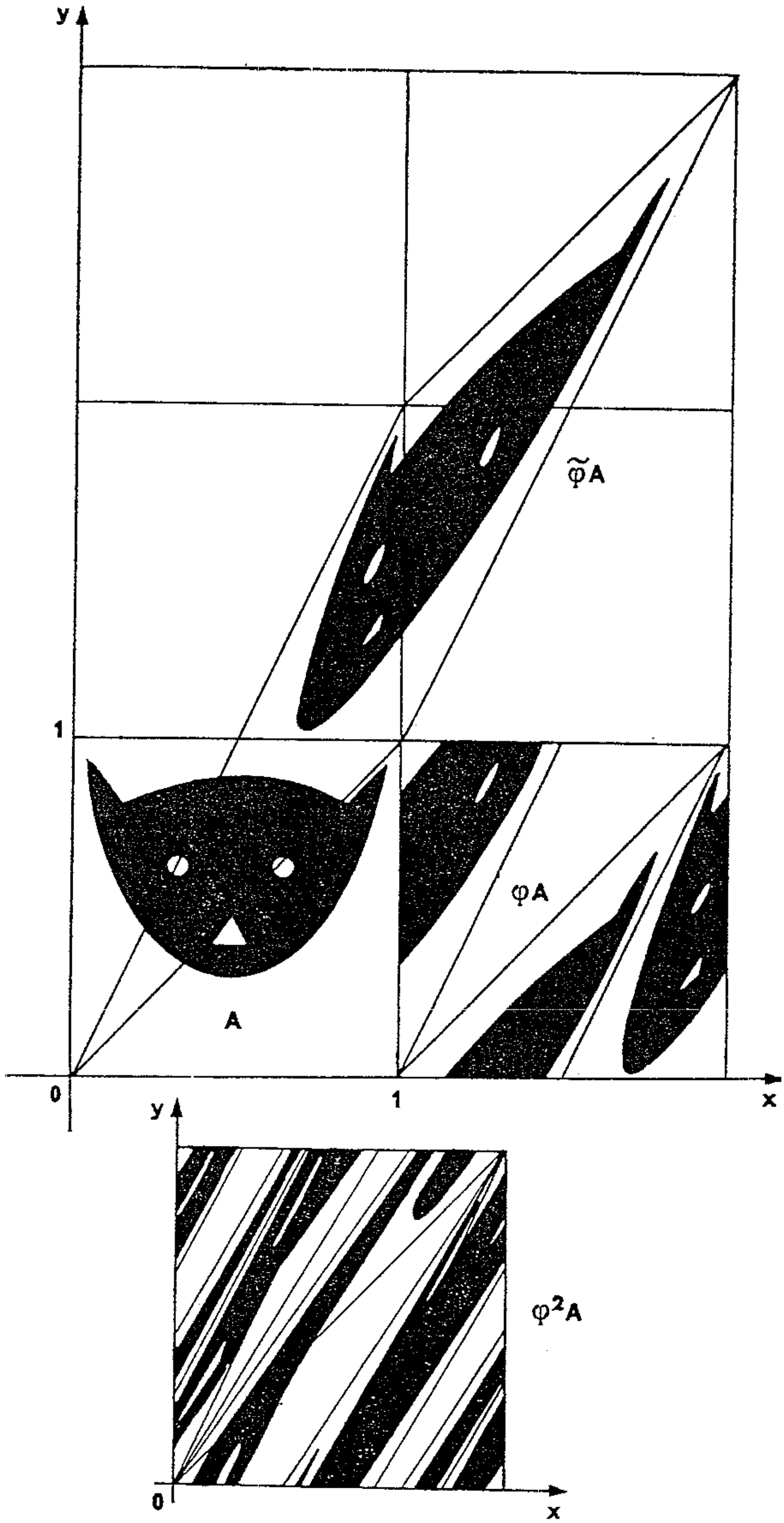


Figure 1.17.

* Trois niveaux de description

Microscopique : trajectoire ; instabilité
↓
Statistique : irréductible ; rupture de la symétrie temporelle.
↓
macroscopique.

* Transformation du boulanger (Arnold ?).

• Ch4 Théorie spectrale

* L'évolution du système est décrite par un opérateur U (Perron-Frobenius).

ρ (densité de probabilité) $\to U\rho$ (nouvelle densité de probabilité).

$U\rho(x) = \frac{1}{2}\left\{\rho(x/2) + \rho\left(\frac{1+x}{2}\right)\right\}$ pour Bernoulli.

• Théorie spectrale : Chercher les λ, φ_λ (vecteurs propres, fonctions propres) telles que :

$$U\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$$

• Mathématiques → dans quel espace (de fonctions) travaille U ?

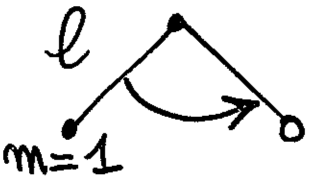
U ne peut pas (simplement) se représenter si on autorise les "masses de Dirac" $\delta(x-x_0)$, i.e. les trajectoires.

* Les trajectoires sont éliminées de la description probabiliste.

(R) que devient l'argument si la dynamique est ~~non~~ linéaire ?
A-t-on un opérateur U linéaire ?

• Ch5 Retour à Poincaré.

le pendule simple et la balançoire.

• 

$\begin{cases} \text{angle } q \\ \text{vitesse angulaire } p = \dot{q} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{énergie cinétique : } \frac{1}{2} \ell^2 p^2 \\ \text{énergie potentielle : } g\ell(1-\cos q). \end{cases}$

énergie totale : hamiltonien $H = \frac{p^2}{2} + \frac{g}{\ell}(1-\cos q)$.

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$$

système hamiltonien : $\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$; $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$

Conservation de l'énergie : $\frac{dH}{dt} = 0$.

"bon" système → intégrable.

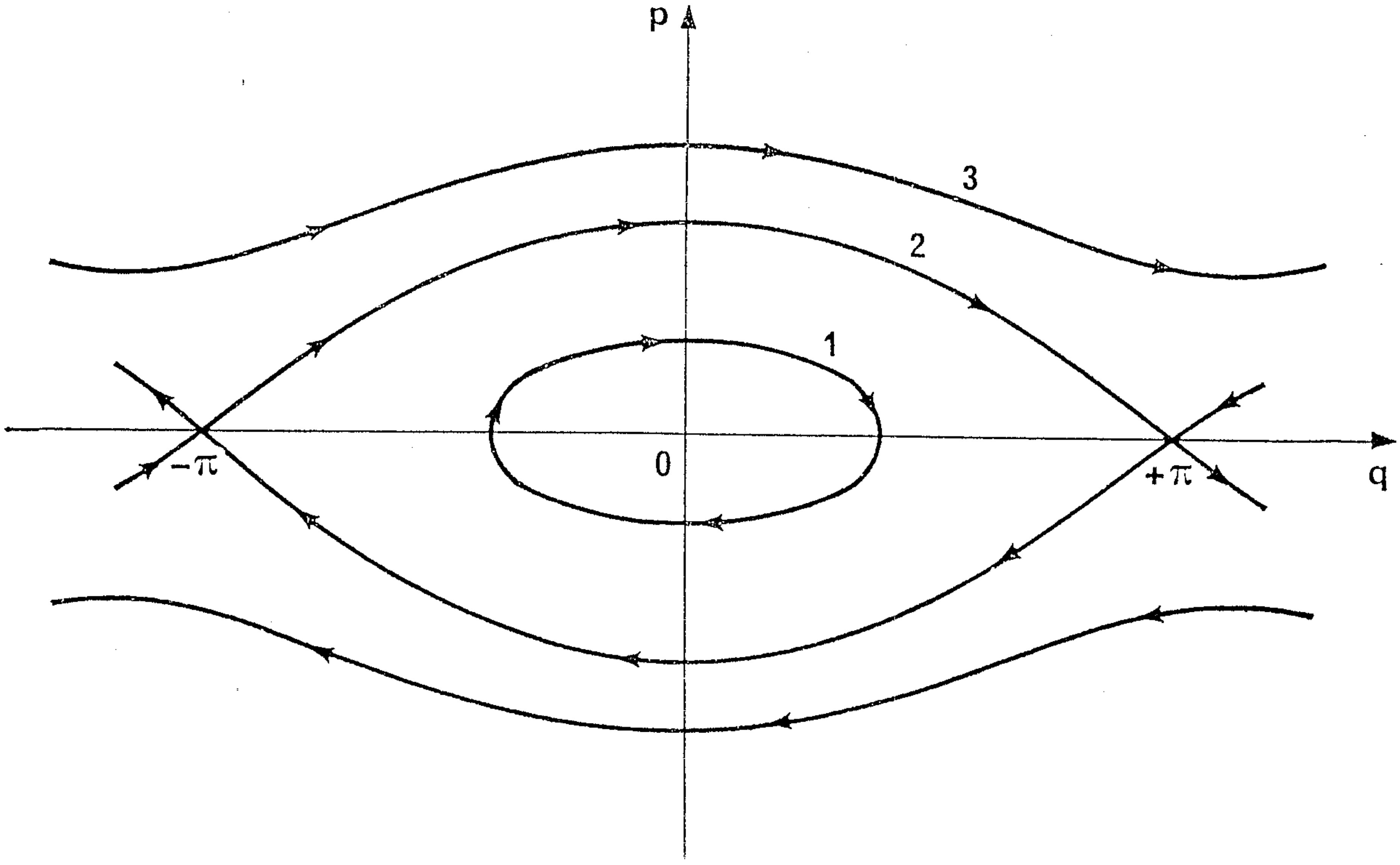
L'équilibre $q=0, p=0$ (repos naturel) est <u>stable</u>

• Balançoire ou <u>oscillateur paramétrique</u>.
$\ell(t)$ varie avec l'action de l'homme qui se balance → $\omega(t+\tau) = \omega(t)$.

$\omega(t) = \omega_0^2 (1 + \varepsilon \cos \nu t)$ $0 < \varepsilon \ll 1$
$\nu = 2\pi/\tau$ fréquence d'excitation.

APPENDICE 5

LE PENDULE SIMPLE

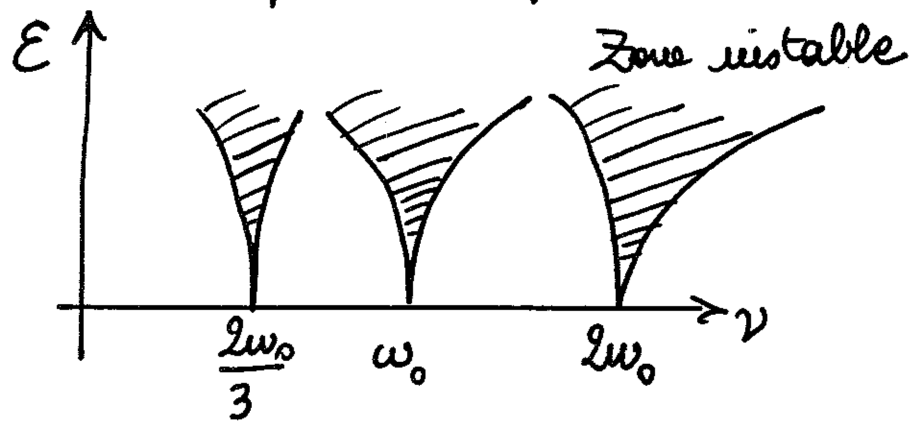


le système n'est plus intégrable (plus de constante du mouvement).

* Stabilité du point fixe (0,0) [en bas] ?
oui si $\nu \neq \frac{2\omega_0}{1}, \frac{2\omega_0}{2}, \frac{2\omega_0}{3}, \dots, \frac{2\omega_0}{k}, \dots$

la balançoire est instable si on fait une flexion pendant un nombre entier de semi-périodes des oscillations propres... Bien connu !

↳ résonance paramétrique.



* question de Poincaré (fin XIX^e). (mécanique céleste)

Système qui est la collection de n pendules simples i.e. intégrable ; il existe n couples "action", "angle" $(J,\alpha)_k \rightarrow$ hamiltonien H_0.
On le perturbe : $H = H_0 + \lambda V$.
λ = force de la perturbation.

- A-t-on encore n invariants $J'_k(\lambda)$ tq $J'_k(0) = J_k$ invariant initial ?

(Th) de Poincaré : NON car apparition de résonances entre les fréquences du système dynamique
(conduisent à des divergences du calcul des perturbations).

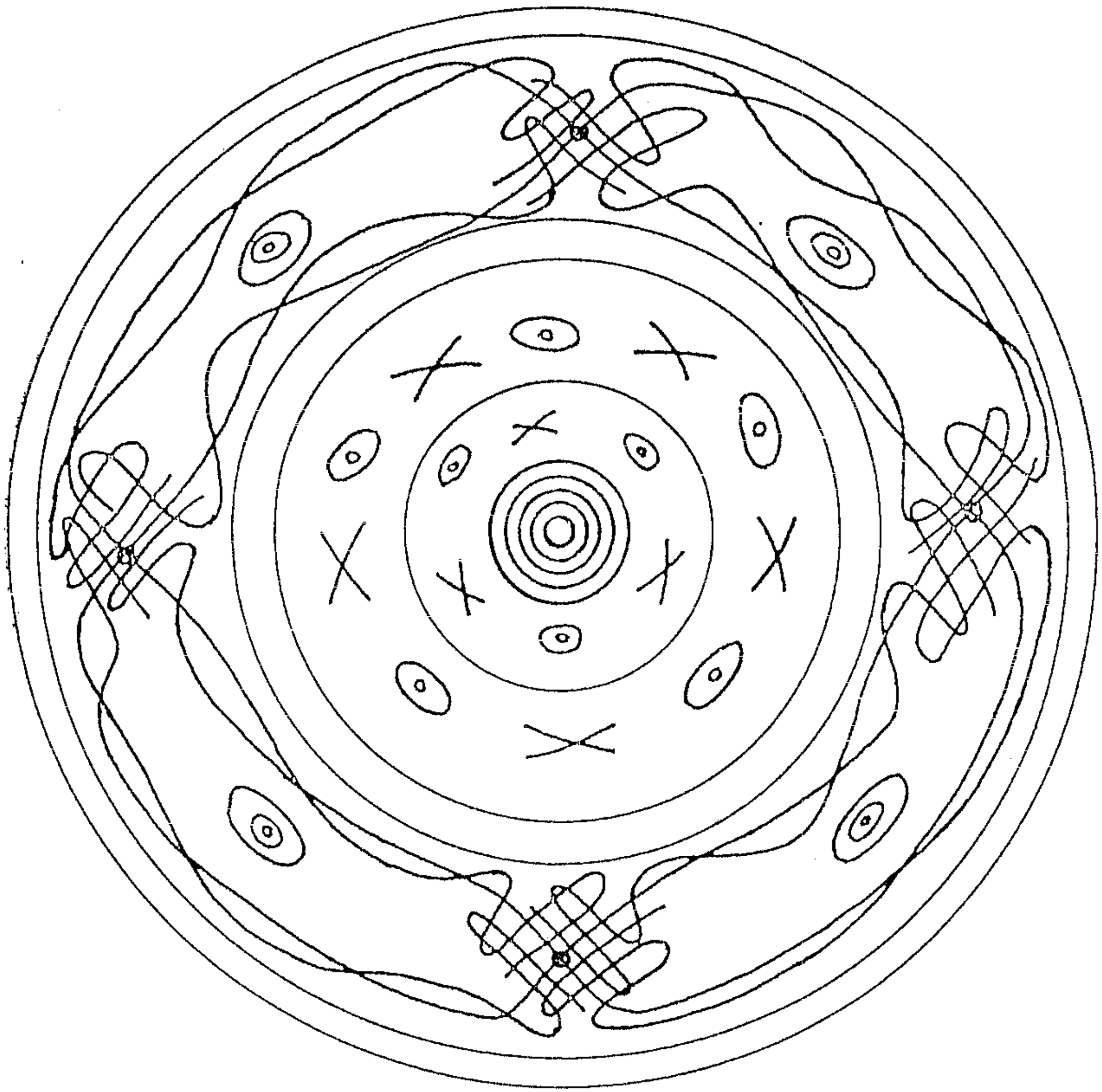


Figure 20.10.

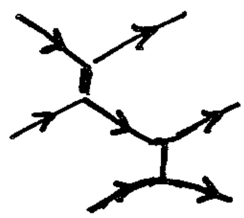
* Si on pouvait éliminer les interactions, l'univers serait isomorphe à un univers de particules libres. Il n'y aurait ni chimie, ni biologie, ni cultures humaines!

* La démarche de I. P. permet d'éliminer ces résonances → "étape essentielle dans la résolution du paradoxe du temps".

• ch 6 Univers quantique

• ch7 Vers la sociologie.

* gaz en interaction.



corrélations : elles préservent la mémoire du passé.

* analogie: conversation entre plusieurs personnes dans une ville
" il reste la mémoire de leur rencontre"
* "l'apparition du temps est lié aux relations entre les molécules"

* Société humaine du néolithique: les hommes n'ont pas changé, mais leurs relations oui. société actuelle: vieillit plus vite (les hommes ont plus de relations entre eux); la dynamique des corrélations sociales a subi une accélération énorme.

* Nouvelle représentation de la mécanique
↳ via une représentation spectrale de l'opérateur d'évolution de la fonction de distribution
↳ élimine les divergences de Poincaré
→ les équations obtenues ont une symétrie temporelle brisée (futur ≠ passé)
→ notion de trajectoire disparaît de la formulation générale; elle redevient un cas particulier valable pour les systèmes stables.

• Ch 8 Chaos et mécanique quantique

* N. Bohr (1961): quel vocabulaire commun entre le monde microscopique (quantique) et le monde macroscopique (classique)?
NB: prendre le vocabulaire de la physique classique.

* Microsystèmes → quantique
macrosystèmes → classique

• FD: Et si la mécanique quantique s'appliquait encore à l'échelle macroscopique?
cf ex de la ville vu au chapitre 7?
→ sociologie quantique.

* Rôle privilégié de l'observateur en méca. quantique
• Chaos quantique → permet de s'en affranchir?

• ch 9 Conclusions générales.

* instabilité [chaos] → probabilité → irréversibilité.
entropie → systèmes instables sont la règle générale, les stables l'exception.

* Pour les systèmes instables, les lois de la nature expriment ce qui est possible, et non ce qui est certain.
ex premiers moments de l'univers, comparé à un enfant qui vient de naître et qui pourrait devenir architecte, musicien ou employé de banque mais ne peut devenir tout à la fois.
La loi probabiliste contient des fluctuations et des bifurcations.

* Deux cultures? Voir Descartes : distinguer deux substances: le corps et l'esprit. Contraste entre
- objets de la science naissante (pendule)
- actes intellectuels.

* Penrose (1989): c'est notre manque de compréhension des lois fondamentales de l'univers qui nous empêche de saisir la notion d'esprit (mind) en termes de physique et de logique.

* I.P: plus nous nous élevons dans les niveaux de complexité, plus évidente est la flèche du temps.

* La science commence à pouvoir décrire la créativité de la nature.

3) Ce que j'en pense.

* Prigogine aime bien philosopher
* où trouver une synthèse précise de ses travaux "sérieux" sur les systèmes dissipatifs?
* Points négatifs.
  Rien de réellement nouveau.
  quid du cas non linéaire?
  quid de concret? ex système solaire < stable? instable?
  Pas de méthodologie prédictive
* Points positifs
  Démarche générale où l'invariance $t \to -t$ est remplacée par deux opérateurs d'évolution (vers le passé et le futur, adjoints l'un de l'autre) [général en physique lorsqu'il y a brisure de symétrie]
  analogies à développer: ville, sociologie.
  Vue des sciences très englobante
* Problème ouvert.
  Peut-on partir d'une description statistique (irréversible) pour reconstruire <u>toute</u> la mécanique (y compris celle des systèmes réversibles)?