CNAM, Paris, 4 Octobre 2010

Relativité d'échelle

Géométrie non-différentiable et espace-temps fractal

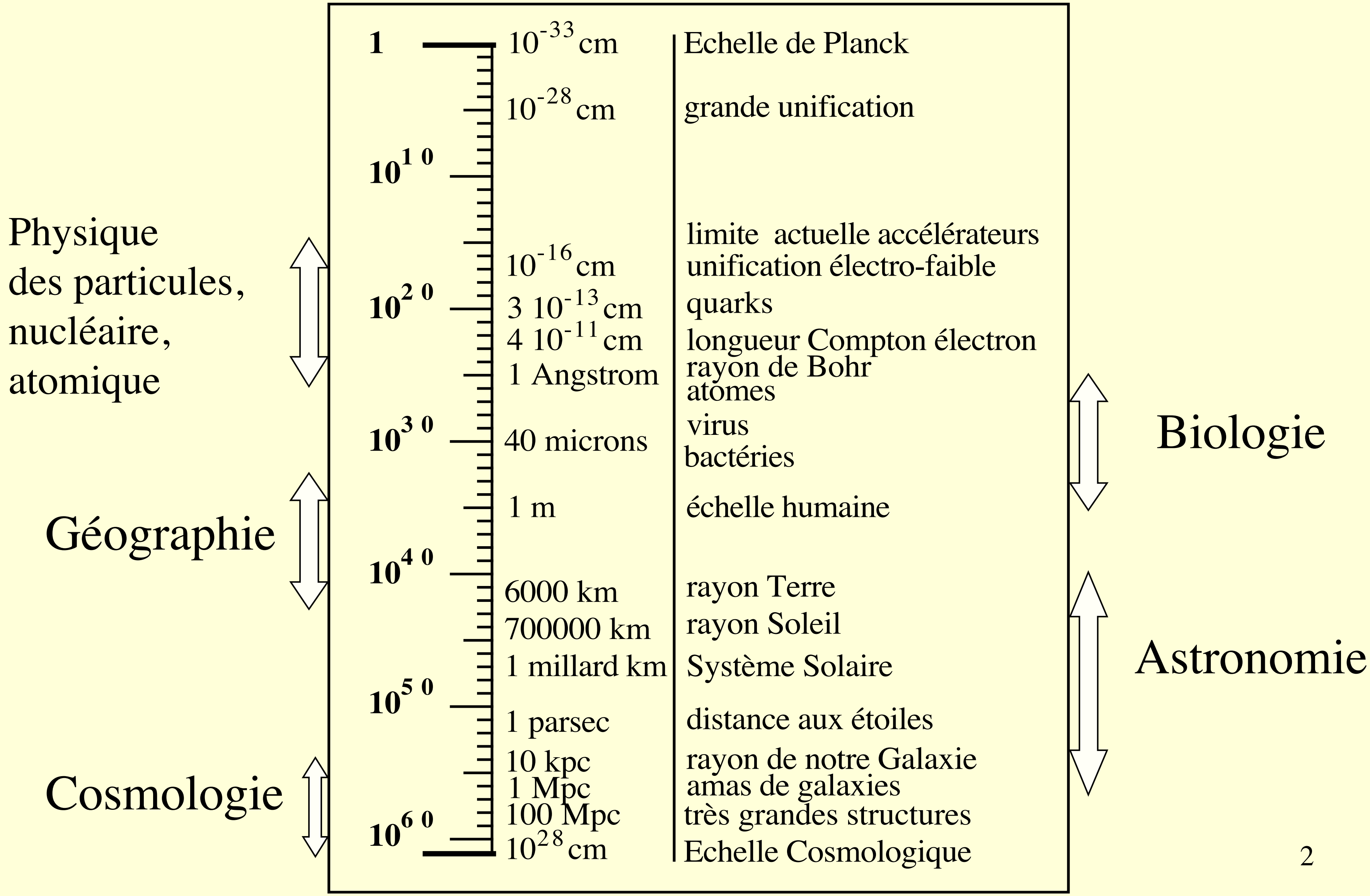
Laurent Nottale

CNRS

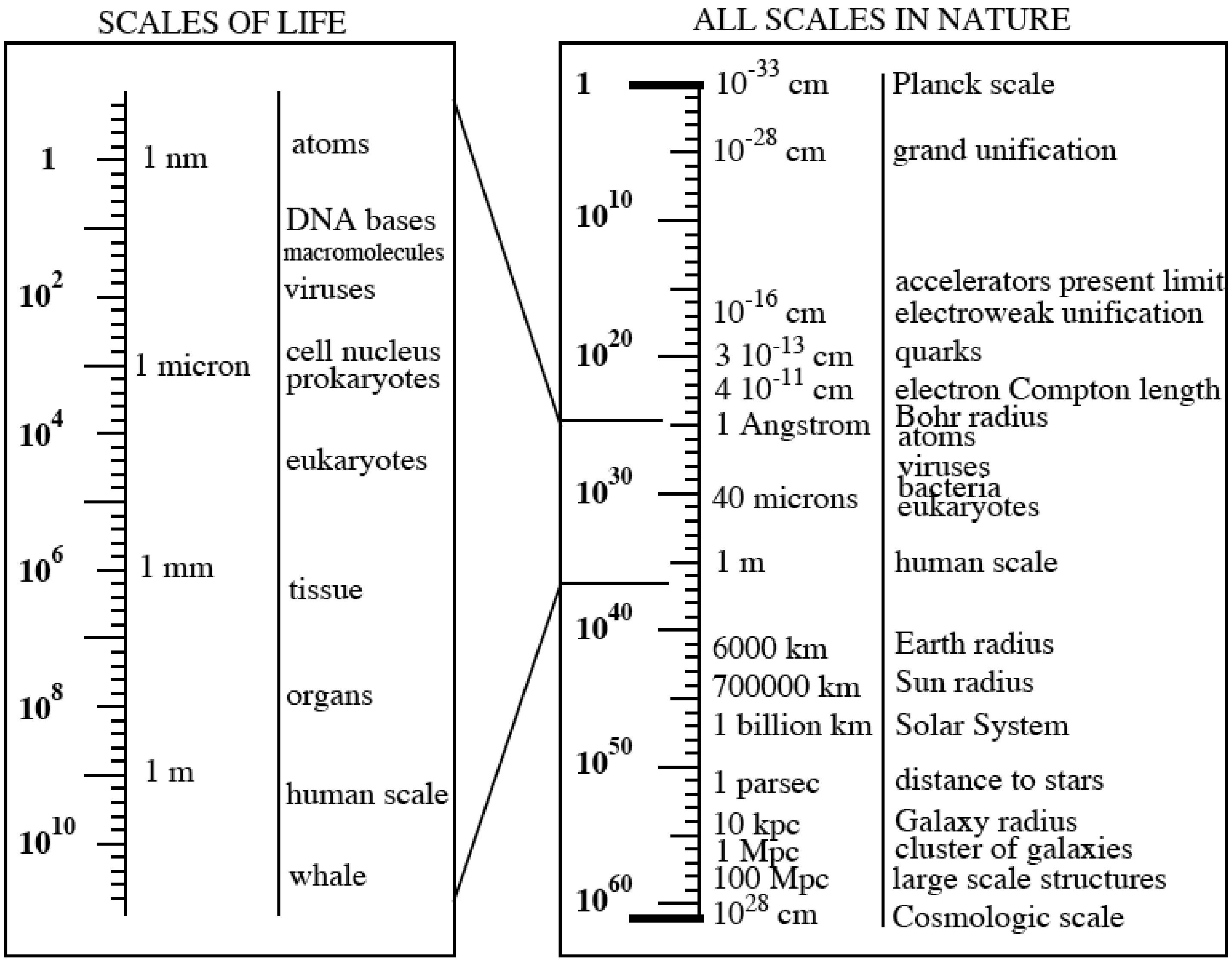
LUTH, Observatoire de Paris-Meudon

http://www.luth.obspm.fr/~luthier/nottale/

Les échelles dans la nature



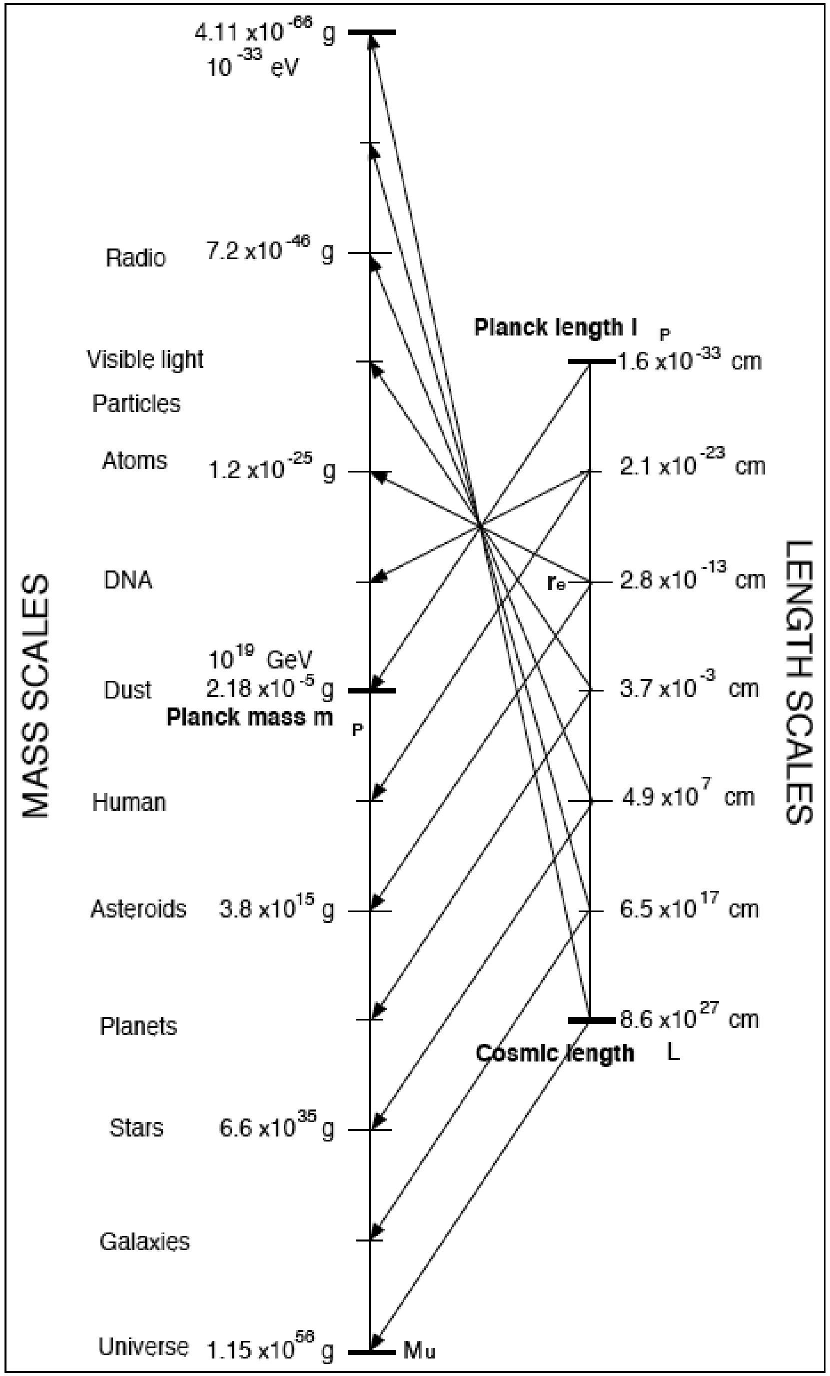
Echelles du vivant



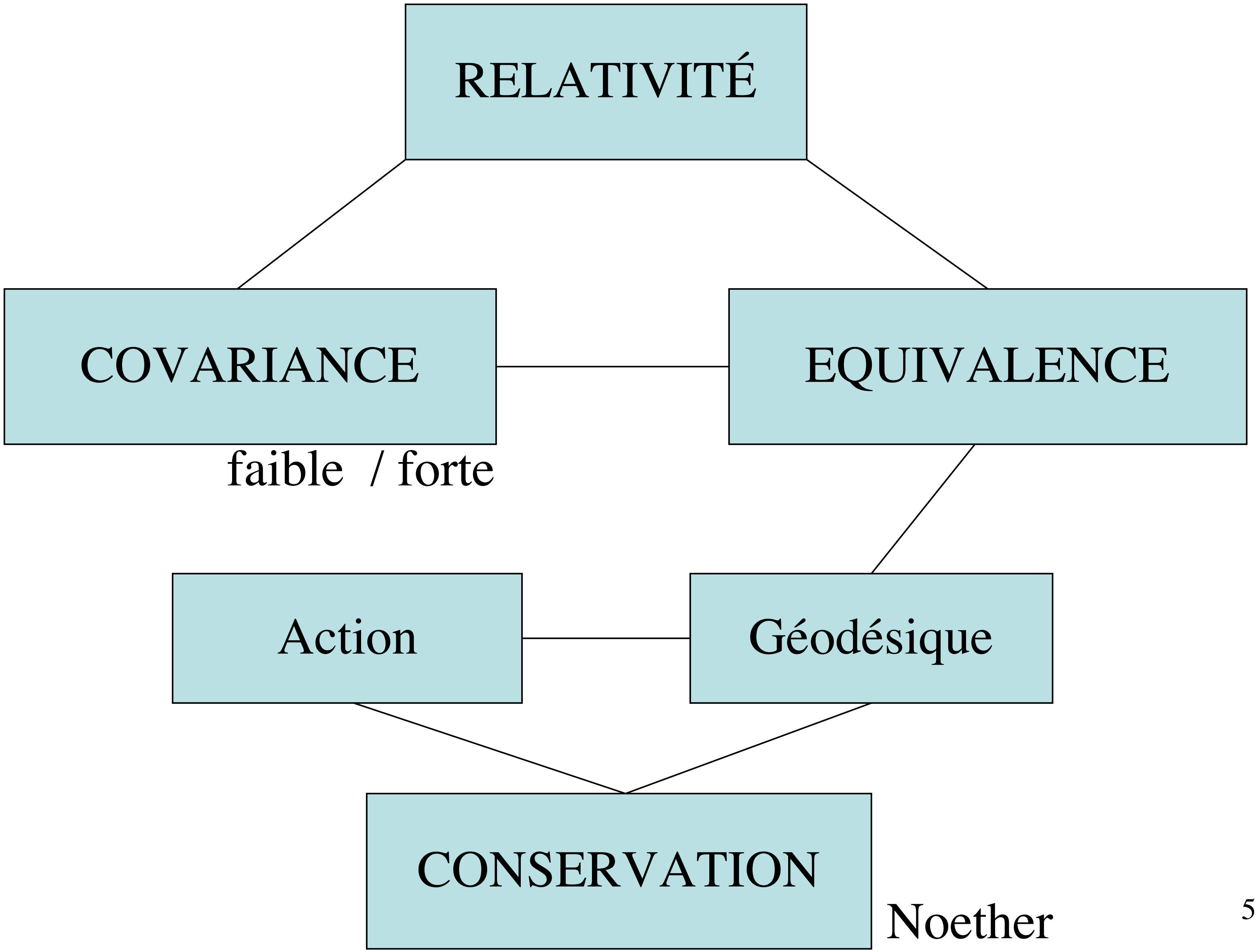
Relation entre échelles de longueur et échelles de masse

$\boxed{l/l_P = m/m_P}$ (GR)

$\boxed{l/l_P = m_P / m}$ (QM)



PRINCIPES PREMIERS



RELATIVITÉ D'ÉCHELLE

Continuité

+Abandon de l'hypothèse de différentiabilité de l'espace-temps

Généraliser la relativité du mouvement ?

Transformations de coordonnées non-différentiables

Théorème

Dépendance explicite des coordonnées en fonction des variables d'échelle + divergence

$$X \rightarrow X(\varepsilon)$$

$$f(X) \rightarrow f[X(\varepsilon), \varepsilon]$$

ESPACE-TEMPS FRACTAL

Compléter les lois de la physique par des lois d'échelle

$$\partial/\partial X \qquad \partial^2/\partial X^2$$

$$\partial/\partial \ln \varepsilon \qquad \partial^2/(\partial \ln \varepsilon)^2$$

$$\partial^2/\partial X\, \partial \ln \varepsilon$$

Contraindre les nouvelles lois d'échelle …

Principe de relativité d'échelle

Covariance d'échelle

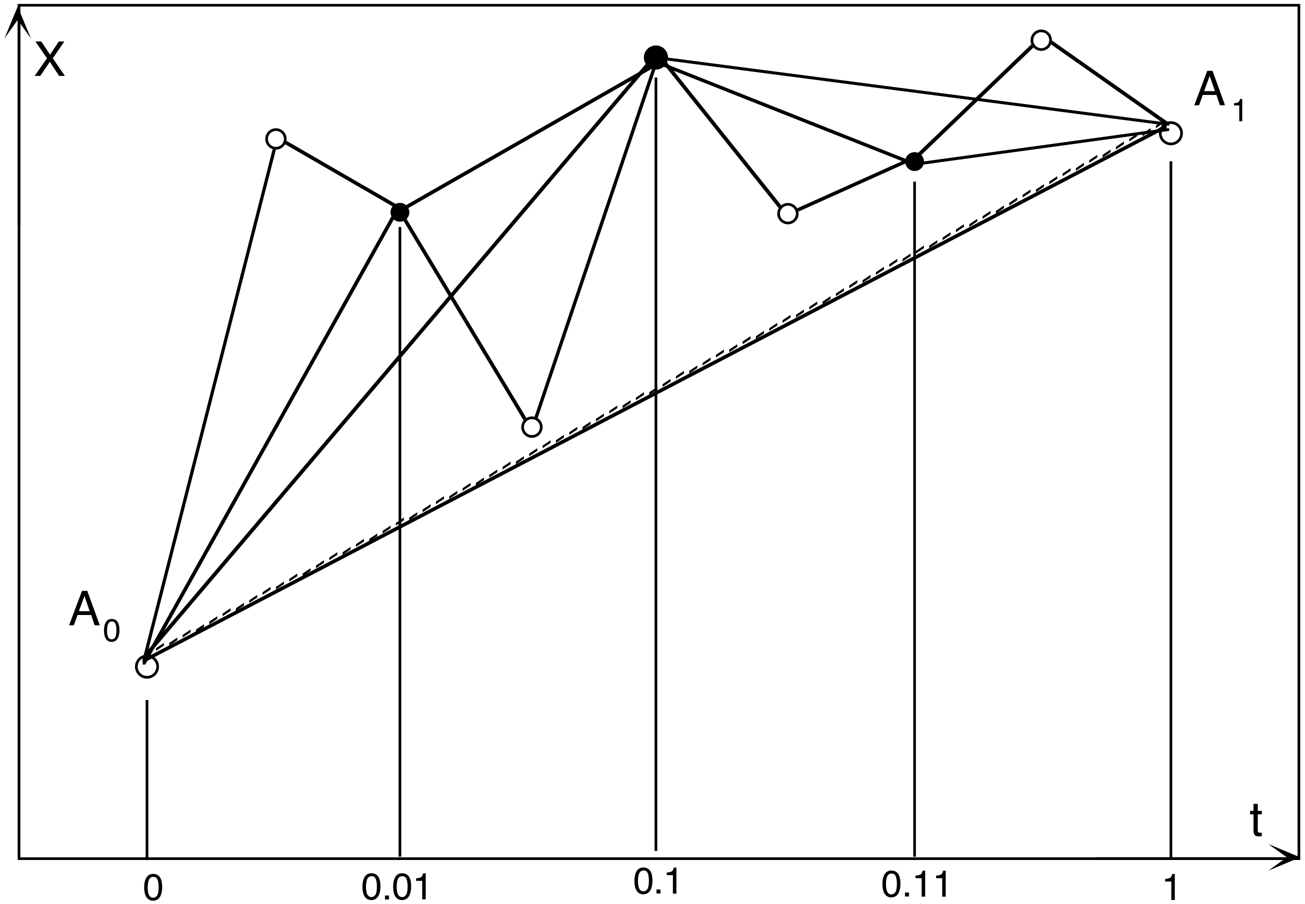
Principe d'équivalence généralisé

Lois linéaires: "galiléennes"
auto-similarité,
dimension fractale constante,
invariance d'échelle

Lois linéaires: "lorentziennes"
dimension fractale variable,
covariance d'échelle,
Échelles limites invariantes

Lois non-linéaires:
relativité générale d'échelle,
dynamique d'échelle,
champs de jauge

Continuité + Non-différentiabilité implique Fractalité



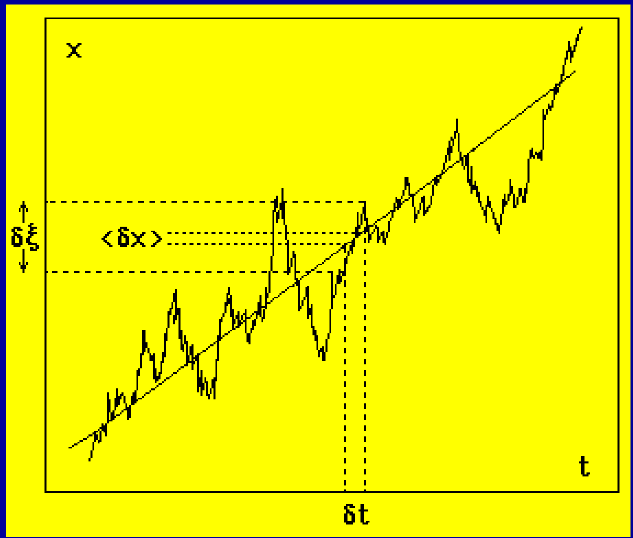
1. Continuité + nondifférentiabilité $\Rightarrow$ dépendance d'échelle

$$\mathcal{L}_0 < \mathcal{L}_1 < \ldots < \mathcal{L}_n < \ldots$$

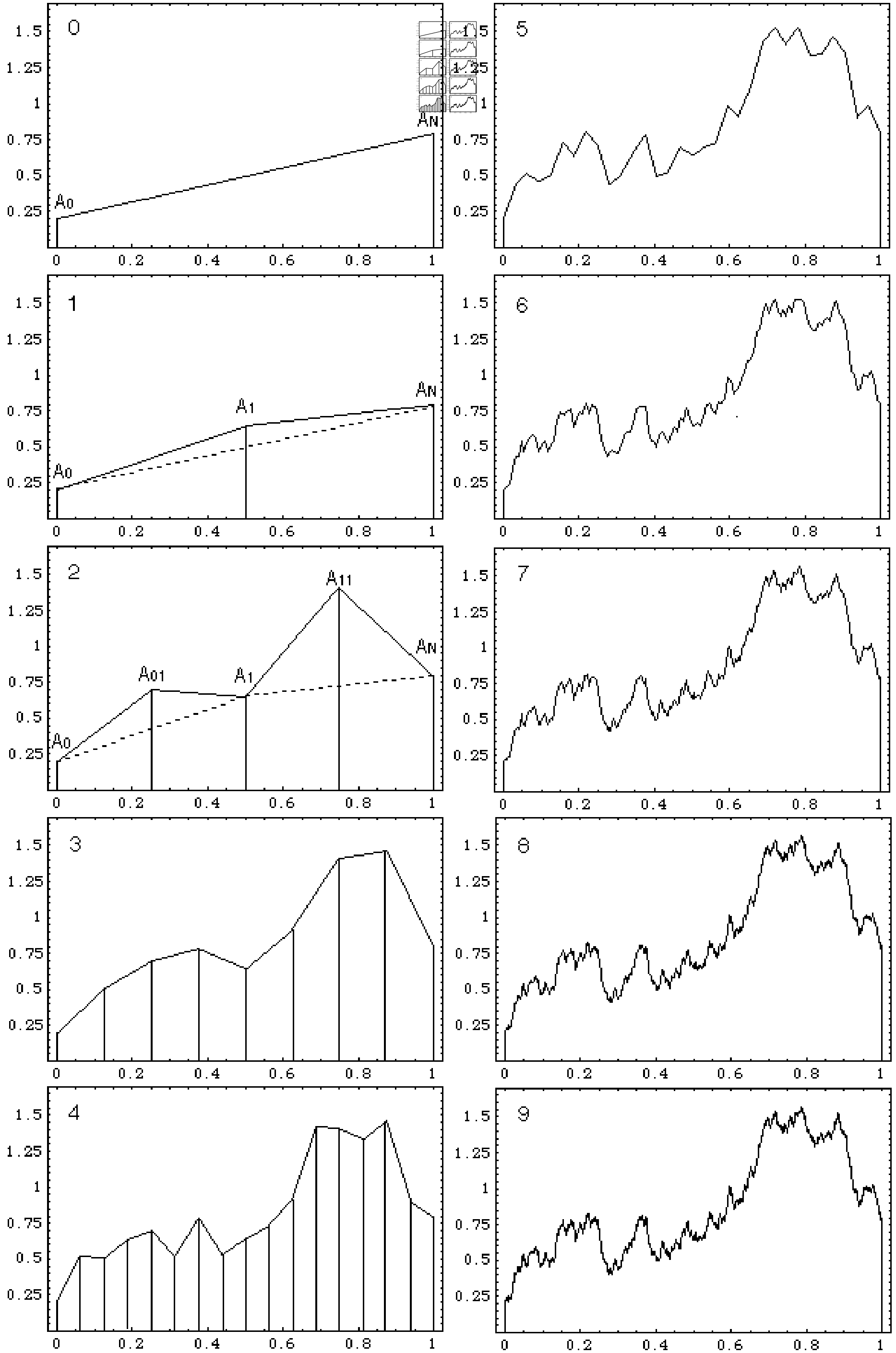
$$r = 2^{-n}\lambda \Rightarrow n = \ln_2\left(\frac{\lambda}{r}\right)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(r) \nearrow \text{quand } r \to 0$$

Continuité + Non-différentiabilité implique Fractalité



Construction par dissections successives



Continuité + Non-différentiabilité implique Fractalité

2. Continuité + nondifférentiabilité $\Longrightarrow$ divergence

Théorème de Lebesgue (1903):
« une courbe de longueur finie est presque partout différentiable »

$\Downarrow$

Comme F est continue et partout ou presque partout NON-différentiable

$\Downarrow$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(r) \to \infty \ \text{ quand } r \to 0$$

i.e. *F* est une courbe fractale

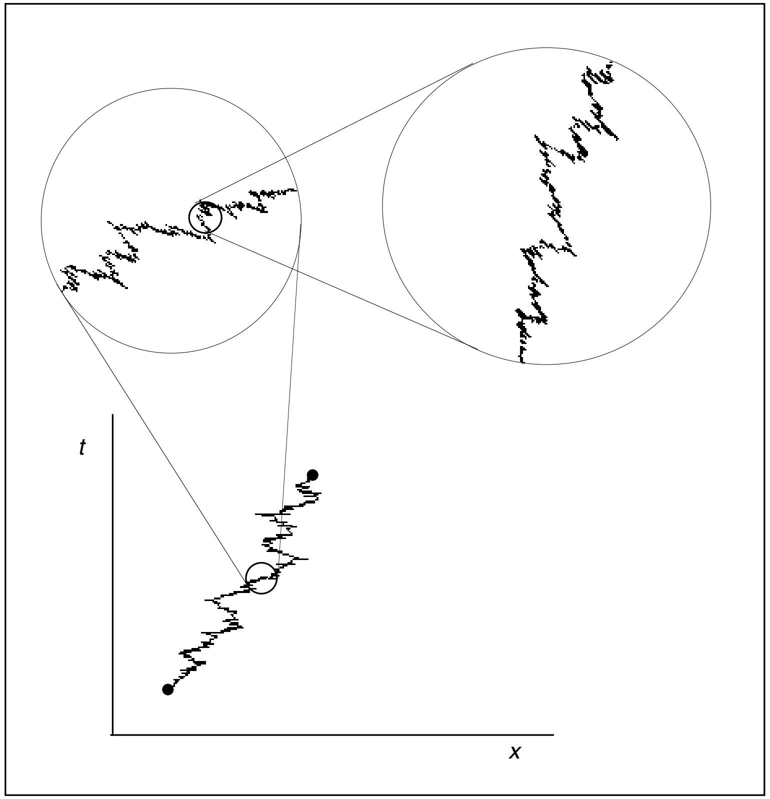
Chemins typiques d’une particule quantique

Feynman (1948), Feynman et Hibbs (1965):

« It appears that quantum-mechanical paths are very irregular. However these irregularities average out over a reasonable length of time to produce a reasonable drift, or « average » velocity, although for short intervals of time the « average » value of the velocity is very high. »

« Typical paths of a quantum-mechanical particle are highly irregular on a fine scale. Thus, although a mean velocity can be defined, no mean-square velocity exists at any point. In other words, the paths are nondifferentiable. »

Chemins typiques d'une particule quantique



Feynman et Hibbs (1965) p. 177:

$$\langle \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\delta t} \right)^2 \rangle = -\frac{\hbar}{im\,\delta t} \langle 1 \rangle$$

Fractals:

$$D_F = 2$$

$$< v^2 >^{\frac{1}{2}} \propto (\delta x)^{1-D_F}$$

$$< v^2 >^{\frac{1}{2}} \propto (\delta t)^{\frac{1}{D_F}-1}$$

Abbott & Wise 1981

Chemins typiques d’une particule quantique

Einstein, lettre à Pauli (1948):

«[…] cette description complète ne pourrait pas se contenter des concepts fondamentaux employés en mécanique du point. Je vous ai dit plus d’une fois que je suis un partisan acharné non pas des équations différentielles, mais bien du principe de relativité générale dont la force heuristique nous est indispensable. Or, en dépit de bien des recherches, je n’ai pas réussi à satisfaire le principe de relativité générale autrement que grâce à des équations différentielles; peut-être quelqu’un découvrira-t-il une autre possibilité, s’il cherche avec assez de persévérance.»

Cf aussi G. Bachelard 1927, 1940, A. Buhl 1934…: non-analycité,voir Alunni 2001

Principe de relativité des échelles

*Redéfinition des intervalles de résolution spatio-temporelle comme caractérisant **l'état d'échelle** du système de coordonnées

*Caractère relatif des résolutions: seuls des rapports d'échelle ont un sens physique, jamais une échelle absolue

***Principe de relativité d'échelle**: « les lois de la nature s'appliquent dans tout système de coordonnée, quel que soit son état d'échelle »

***Principe de covariance d'échelle**: les équations de la physique gardent leur forme (la plus simple possible)* dans les transformations d'échelle du système de coordonnées

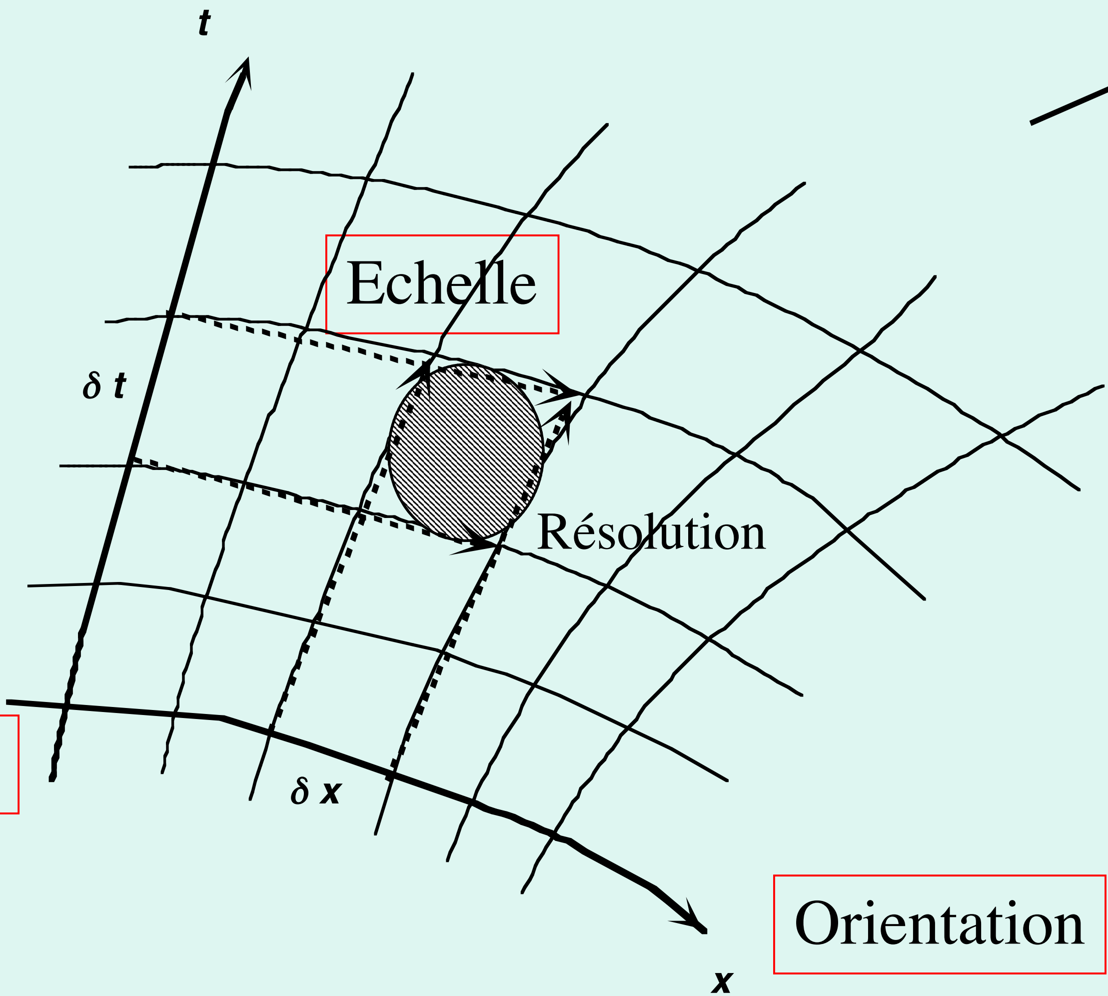
*Faible: même forme dans des transformations généralisées
Forte: forme galiléenne (vide, mouvement inertiel)

Etat d'un système de coordonnées:

Mouvement

Vitesse

Accélération



Origine

Position

Orientation

Angles

Relativité d'échelle : structure de la théorie

Lois d'échelle (lois de transformation dans l'espace des échelles)	Dynamique induite dans l'espace standard	Couplage* échelle-mouvement
« Galiléennes » D_T=2 Relativité d'échelle restreinte Relativité d'échelle généralisée* Lois quantiques dans l'espace des échelles	Mécanique quantique standard Mécaniques quantiques généralisées	Champs de jauge abéliens et non-abéliens