CNAM, Paris, 4 Octobre 2010

Lois de transformation d'échelle

De l'invariance à la covariance d'échelle

Laurent Nottale

CNRS

LUTH, Observatoire de Paris-Meudon

http://www.luth.obspm.fr/~luthier/nottale/

Références:

*Nottale, L., 1997, in "Scale invariance and beyond", proceedings of Les Houches school, Ed. B. Dubrulle, F. Graner and D. Sornette, (EDP Sciences /Springer), p. 249
"Scale relativity"
http://wwwusr.obspm.fr/~nottale/arhouche.pdf

*Nottale L., 2002, in Traité IC2, Traitement du Signal et de l'Image, "Lois d'échelle, fractales et ondelettes", sous la direction de P. Abry, P. Gonçalvès et J. Levy Vehel (Hermès Lavoisier 2002), Vol. 2, Chap. 7, pp. 233-265.
"Relativité d'échelle, nondifférentiabilité et espace-temps fractal"
http://wwwusr.obspm.fr/~nottale/arloidechelle.pdf

Opérateur de dilatation, méthode de Gell-Mann-Levy:

$$\mathcal{L}(\varepsilon') = \mathcal{L}(\varepsilon + \varepsilon\, d\rho) = \mathcal{L}(\varepsilon) + \frac{\partial \mathcal{L}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\, \varepsilon\, d\rho = (1 + \tilde{D}\ d\rho)\, \mathcal{L}(\varepsilon),$$

$$\tilde{D} = \varepsilon\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \ln \varepsilon}$$

Equation différentielle la plus simple possible:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,\varepsilon)}{\partial \ln \varepsilon} = \beta(\mathcal{L})$$

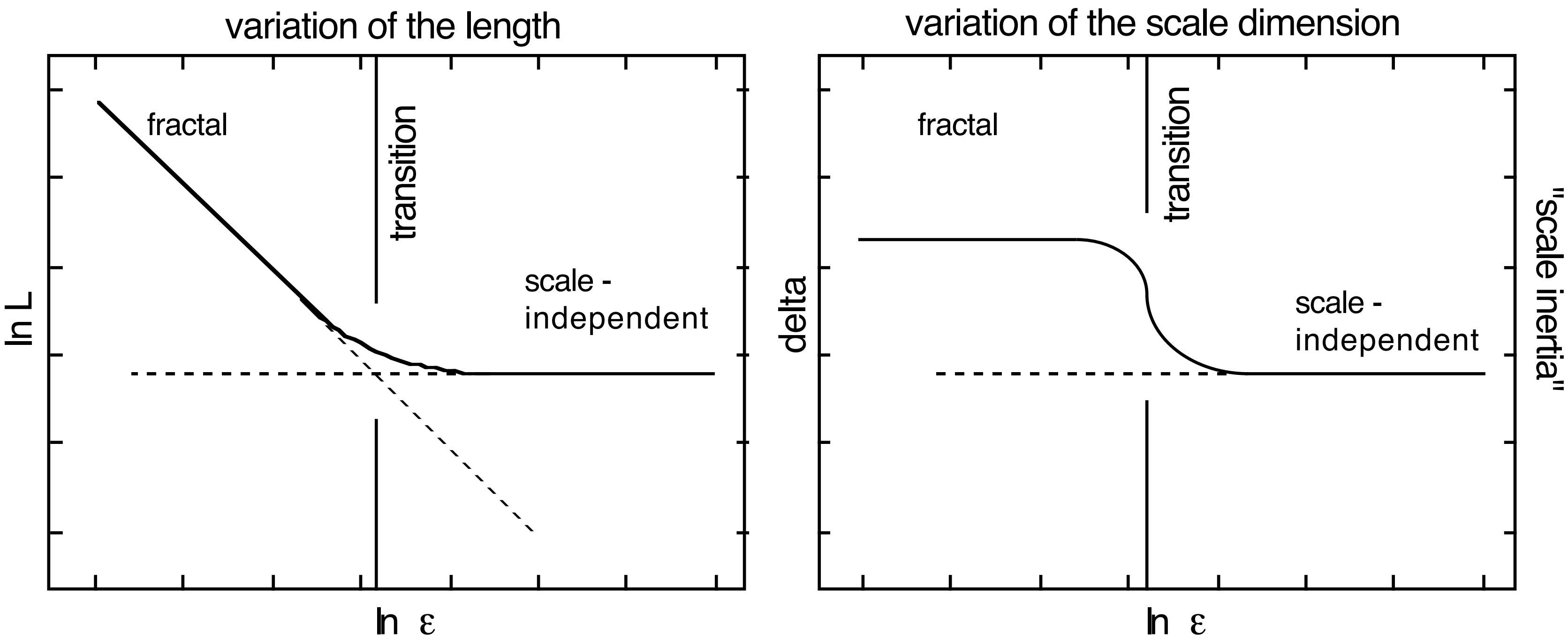
Développement limité:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,\varepsilon)}{\partial \ln \varepsilon} = a + b\mathcal{L}$$

Solution: loi fractale de dimension constante + transition:

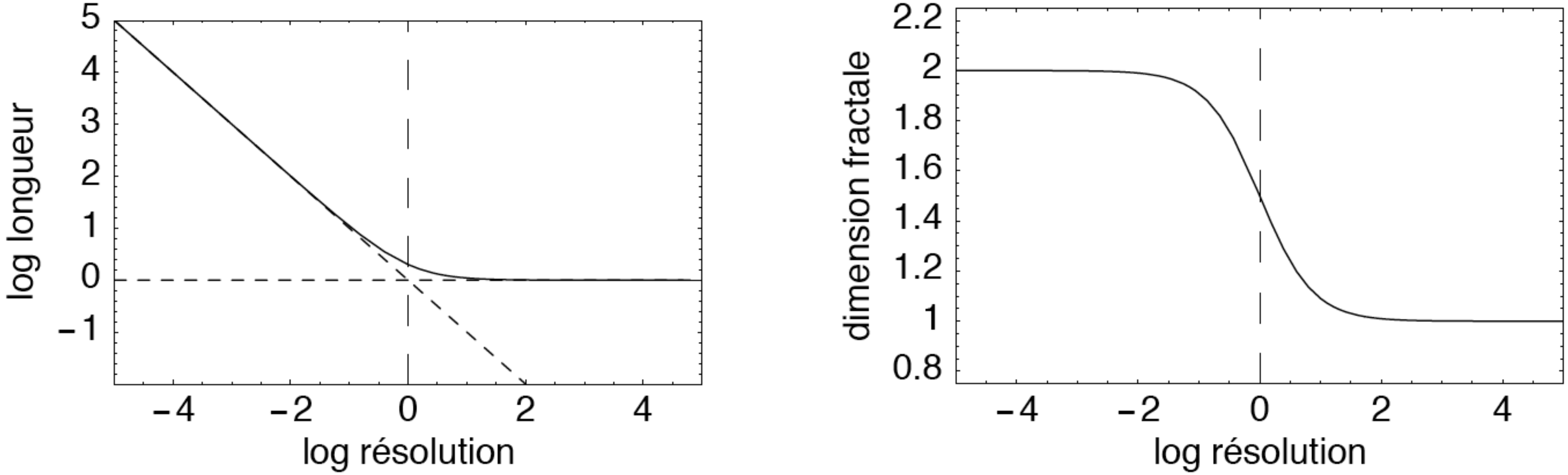
$$\mathcal{L}(x,\varepsilon) = \mathcal{L}_0(x)\ \left[1 + \zeta(x)\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{-b}\right]$$

$$\mathcal{L}(x,\varepsilon) = \mathcal{L}_0(x)\left[1 + \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\delta}\right] \qquad \delta_{\rm eff} = \frac{\delta}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)^{\delta}}$$



Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective ($\delta = D_F$-1) dans le cas de lois d' « inertie d'échelle » (solutions d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre).

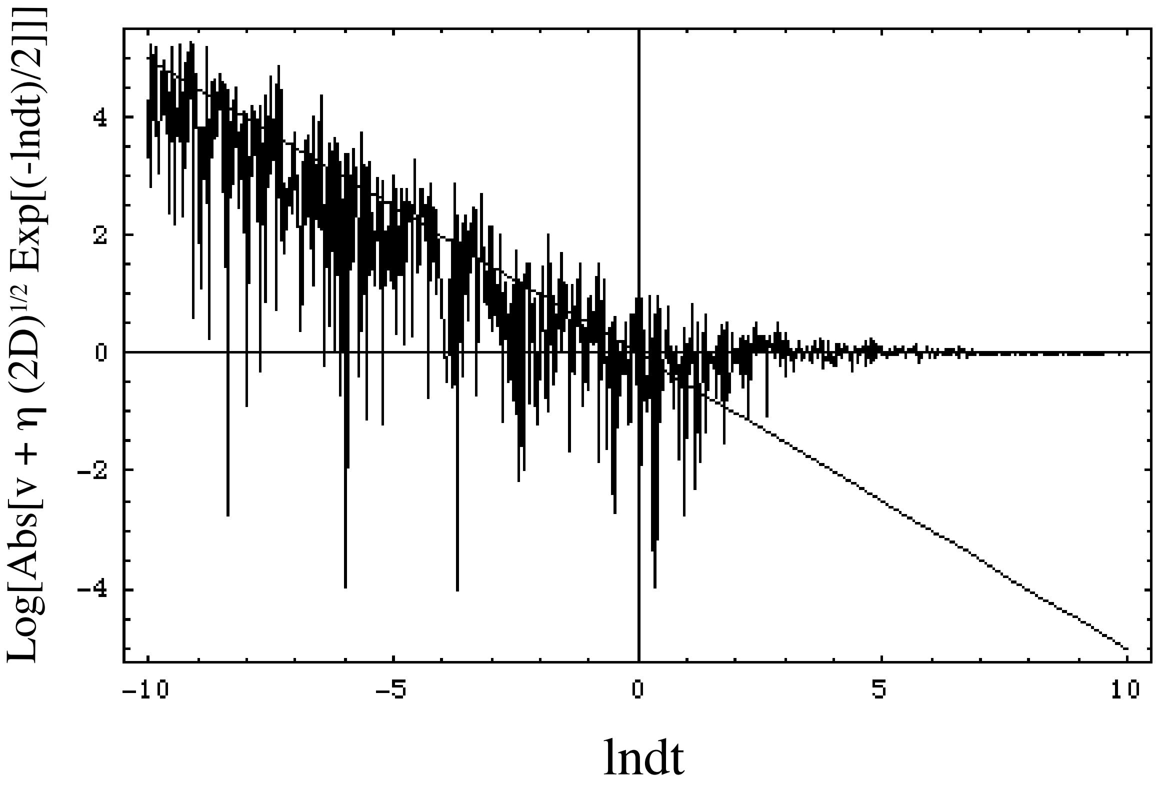
Une transition



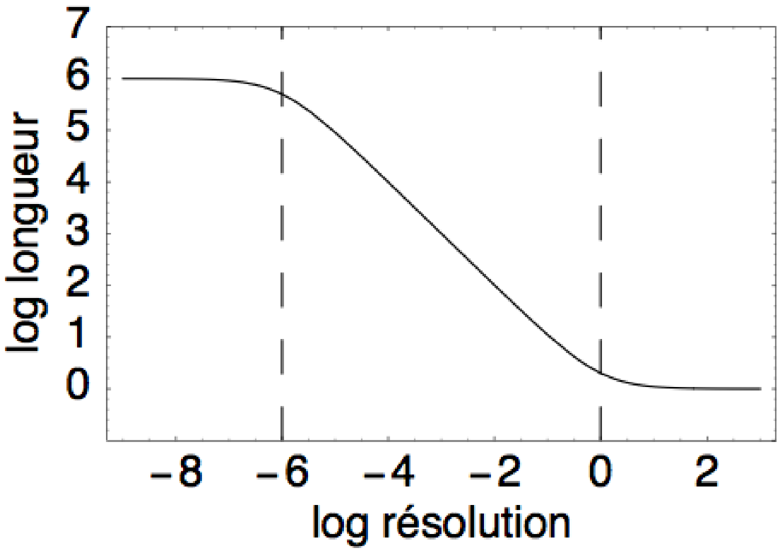
Solution de l'équation différentielle d'échelle:

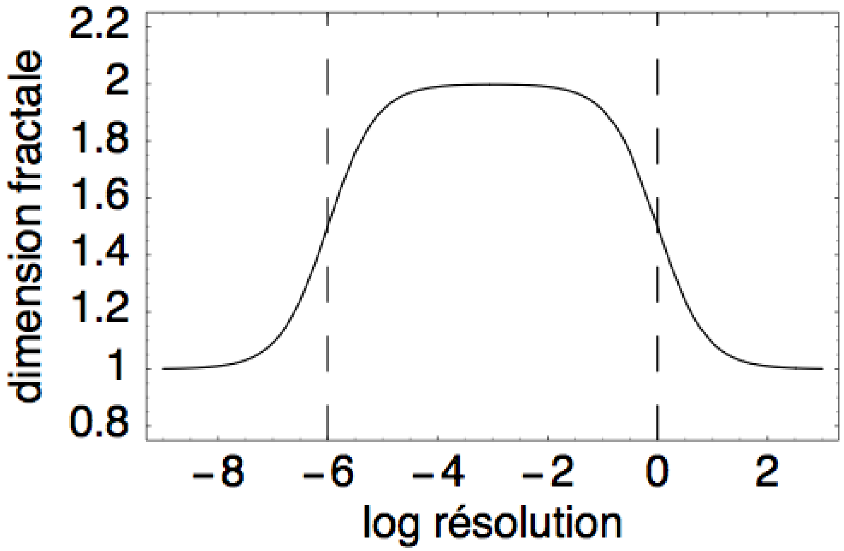
$$dL/d \ln r = a + b\,L$$

Vitesse totale sur la géodésique (parties classique et fractale) en fonction de l'échelle



Deux transitions (log décimal)





Solution de l'équation différentielle d'échelle:

$$dL/d \ln r = a + b\,L + c\,L^2$$

Relativité d'échelle galiléenne

Définition locale de la dimension d'échelle $\delta = D_F - 1$: $\delta = \dfrac{d \ln \mathcal{L}}{d \ln(\lambda/\varepsilon)}$

Comportement asymptotique (partie fractale):

$$\mathcal{L}(x,\varepsilon) = \mathcal{L}_0(x) \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\delta}$$

Transformation d'échelle $\varepsilon \to \varepsilon'$

$$\ln \frac{\mathcal{L}(\varepsilon')}{\mathcal{L}_0} = \ln \frac{\mathcal{L}(\varepsilon)}{\mathcal{L}_0} + \delta(\varepsilon) \ln \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) \qquad \delta(\varepsilon') = \delta(\varepsilon)$$

Loi de composition des dilatations:

$$\ln \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon}\right) = \ln \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) + \ln \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)$$

Même structure mathématique que le groupe de Galilée (mouvement)

$$X' = X - VT, \;\; T' = T, \;\; W = U + V$$

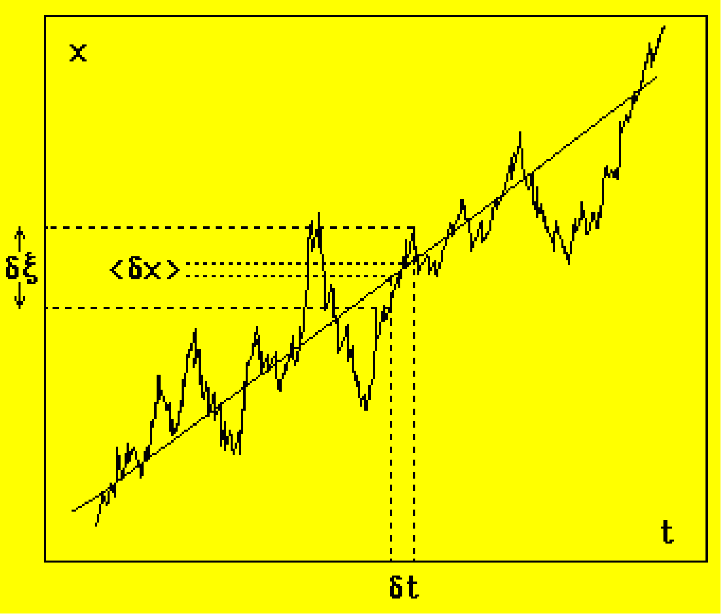
Longueur d'une courbe fractale

Deux façons de mesurer la longueur d'une courbe fractale, en fonction
(1) de la résolution spatiale δX : mesure *statique*
(2) de la résolution temporelle δt (= invariant): mesure *cinématique*
--> formules asymptotiques (parties fractales):

$$\mathcal{L}(\zeta, \delta X) = \mathcal{L}_0(\zeta)\left(\frac{\lambda}{\delta X}\right)^{\delta}$$

$$\mathcal{L}(\zeta, \delta t) = \mathcal{L}_0(\zeta)\left(\frac{\tau}{\delta t}\right)^{1-\frac{1}{D_F}}$$

$$\delta = D_F - D_T = D_F - 1$$



Relation entre intervalles de résolution spatiale et temporelle:

$$\left(\frac{\delta X}{\lambda}\right)^{D_F} = \left(\frac{\delta t}{\tau}\right)$$

Galilean scale-relativity

Identification of standard scale transformations (constant fractal dimension) with a Galileo relativity group of scale

Scale transformation: $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ $\quad \mathbb{V} = \ln(\varepsilon/\varepsilon')$

$$\ln \frac{\mathcal{L}(\varepsilon')}{\mathcal{L}_0} = \ln \frac{\mathcal{L}(\varepsilon)}{\mathcal{L}_0} + \mathbb{V}\ \delta(\varepsilon)$$

$$\delta(\varepsilon') = \delta(\varepsilon)$$

$$\mathbb{V}'' = \mathbb{V} + \mathbb{V}'$$

Same mathematical structure as Galileo group of inertial motion transformation:

$$x' = x - V\,t$$
$$t' = t$$
$$W = U + V$$

$$V = V\,(K'/K)$$

Galilean scale-relativity:

scale variable = invariant (proper) time resolution

Basic description of fractal fluctuation:* $d\chi = \langle d\xi^2 \rangle^{1/2}$

$$\frac{d\chi}{\lambda} = \left(\frac{ds}{\lambda}\right)^{\frac{1}{D}}$$

($D = 2$ —> $\langle d\xi^2 \rangle = \lambda\, ds$)

Scale transformation on the proper time differential interval: $ds \longrightarrow ds'$

$$\ln \frac{d\chi'}{\lambda} = \ln \frac{d\chi}{\lambda} + \frac{1}{D} \ln \frac{ds'}{ds}$$

$$\frac{1}{D'} = \frac{1}{D}$$

$$\ln \frac{ds''}{ds} = \ln \frac{ds''}{ds'} + \ln \frac{ds'}{ds}$$

The « scale-time » is now the Hölder exponent $H = 1/D$ instead of $\delta = D$-1.

* See e.g. Célérier & Nottale, 2004, J. Phys. A37, 931

Généralisation: dimensions fractales variables

Analogie avec les lois du mouvement

Aristote: « le temps est la mesure du mouvement » —> variables primaires *x* et *v*, le temps *t* s'en déduit

$$``t = \frac{x}{v}"$$

Galilée: « renversement » des variables + caractère vectoriel de *x* et *v* + petites quantités (anticipant le calcul différentiel)

$$v^k = \frac{dx^k}{dt}$$

Newton: passage à la dynamique, définition de l'accélération comme dérivée seconde

$$a^k = \frac{d^2x^k}{dt^2}$$

Mandelbrot: définition de la dimension d'échelle $\delta = D_F - D_T$: $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{D_F - D_T}$

$$\Rightarrow \quad \delta = \frac{\ln(\mathcal{M}/\mathcal{M}_0)}{\ln(\lambda/\varepsilon)}$$

Dimension variable: passage à une définition locale

$$\delta = -\frac{d\ln\mathcal{M}}{d\ln\varepsilon}$$

Renversement des variables: projection + résolutions comme « vitesses d'échelle »

$$\ln\frac{\varepsilon^k}{\lambda^k} = \frac{d\ln\mathcal{L}^k}{d\delta}$$

Nouveau concept:« Accélération d'échelle »

$$\Gamma^k = \frac{d^2\ln\mathcal{L}^k}{d\delta^2}$$

Relativité d'échelle restreinte

Loi générale de transformation d'échelle satisfaisant au principe de relativité ?

Trouver les quatre fonctions a(V), b(V), c(V), d(V) qui satisfont:
- *loi de composition interne
- *invariance par réflexion

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon'$$

$$V = \ln\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)$$

$$\ln\frac{\mathcal{L}'}{\mathcal{L}_0} = a(V)\ \ln\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0} + b(V)\,\delta \qquad \delta' = c(V)\ \ln\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0} + d(V)\,\delta$$

Solution (LN, 1992, Int.J.Mod.Phys. A7, 4899): transformation log-Lorentz

Nouvelle loi de composition des dilatations

$$\lambda_0 \longrightarrow \varepsilon \xrightarrow{\varrho} \varepsilon'$$

$$\ln\frac{\varepsilon'}{\lambda_0} = \frac{\ln(\varepsilon/\lambda_0) + \ln\varrho}{1 + \ln\varrho\ \ln(\varepsilon/\lambda_0)/\ln^2(\mathbf{\Lambda}/\lambda_0)}$$

$\mathbf{\Lambda}$ = échelle de longueur invariante sous les dilatations

Le produit de dilatations standard ('relativité d'échelle Galiléenne') retrouvé à la limite $\mathbf{\Lambda} \rightarrow 0,\ \ \mathbf{\Lambda} \rightarrow \infty$

PETITES ECHELLES:
Identification de l'échelle invariante avec l'échelle de Planck

$$\mathbf{\Lambda} = \lambda_{\mathbb{P}} = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.6160(11) \times 10^{-35}\ m$$

GRANDES ECHELLES:
Identification de l'échelle invariante avec l'échelle de longueur donnée par la constante cosmologique

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbb{L} = \Lambda_c^{-1/2} = (8.8 \pm 0.8) \times 10^{25}\ \mathrm{m}$$

RAPPORT des deux:

$$\mathbb{K} = \frac{\mathbb{L}}{\lambda_{\mathbb{P}}} = 5.3 \times 10^{60}$$

Généralisation des transformations d'échelle en relativité d'échelle restreinte

(1) Résolution spatiale: 4 variables d'échelle $\varepsilon^k = \delta x^k$

(L.N. 1992, IJMPA 7, 4899)

$$\ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) = \frac{\delta_0 \ \ln(\lambda_0/\varepsilon)}{\sqrt{1 - \ln^2(\lambda_0/\varepsilon)/\ln^2(\lambda_0/\mathbf{\Lambda})}}$$

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\delta_0}{\sqrt{1 - \ln^2(\lambda_0/\varepsilon)/\ln^2(\lambda_0/\mathbf{\Lambda})}}$$

$$\ln\frac{\varepsilon'}{\lambda_0} = \frac{\ln(\varepsilon/\lambda_0) + \ln\varrho}{1 + \ln\varrho \ \ln(\varepsilon/\lambda_0)/\ln^2(\mathbf{\Lambda}/\lambda_0)}$$

$$\Lambda = l_{\mathbb{P}}$$

Echelle de longueur dePlanck, invariante sous les dilatations, Innatteignable, indépassable

(2) Résolution temporelle propre:
1 variable d'échelle $\varepsilon = \delta s$

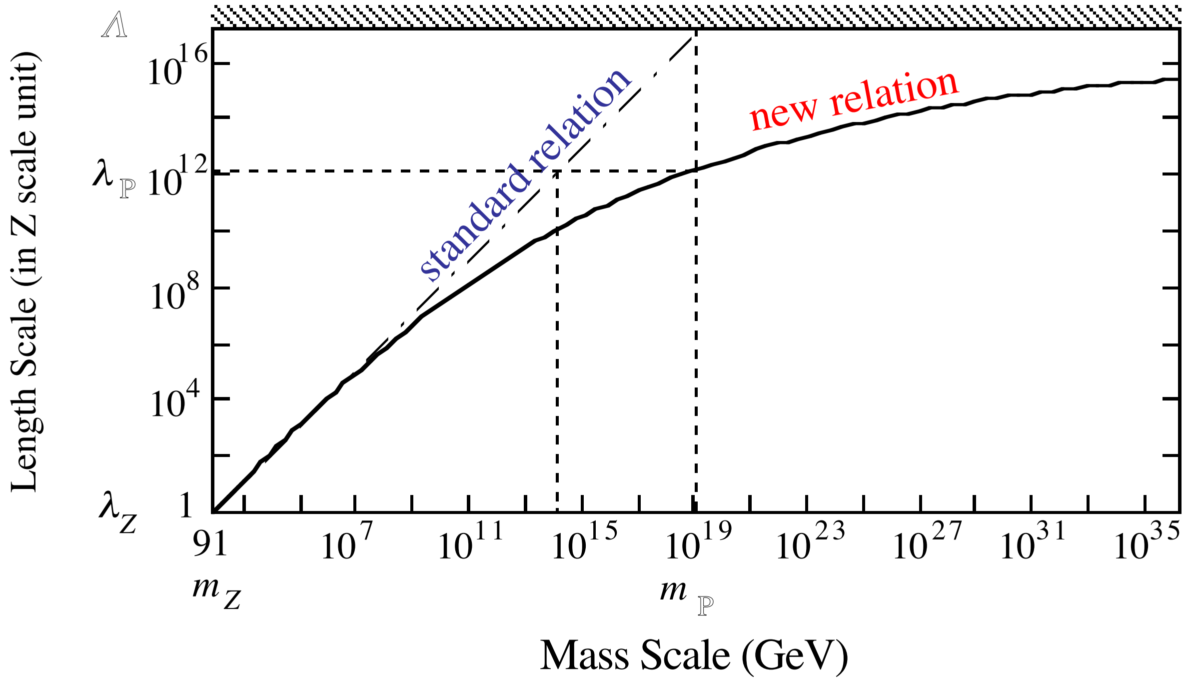
Transformation λ= longueur de Compton —> ds, avec $D(\lambda) = 2$

$$\ln\frac{d\chi}{\lambda} = \frac{\frac{1}{2}\ln\frac{ds}{\lambda}}{\sqrt{1 - \frac{\ln^2(\lambda/ds)}{\ln^2(\lambda/l_{\mathbb{P}})}}}$$

$$D = 2\sqrt{1 - \frac{\ln^2(\lambda/ds)}{\ln^2(\lambda/l_{\mathbb{P}})}}$$

Nouvelle transformation entre échelles de longueur et échelles de masse en relativité d'échelle restreinte

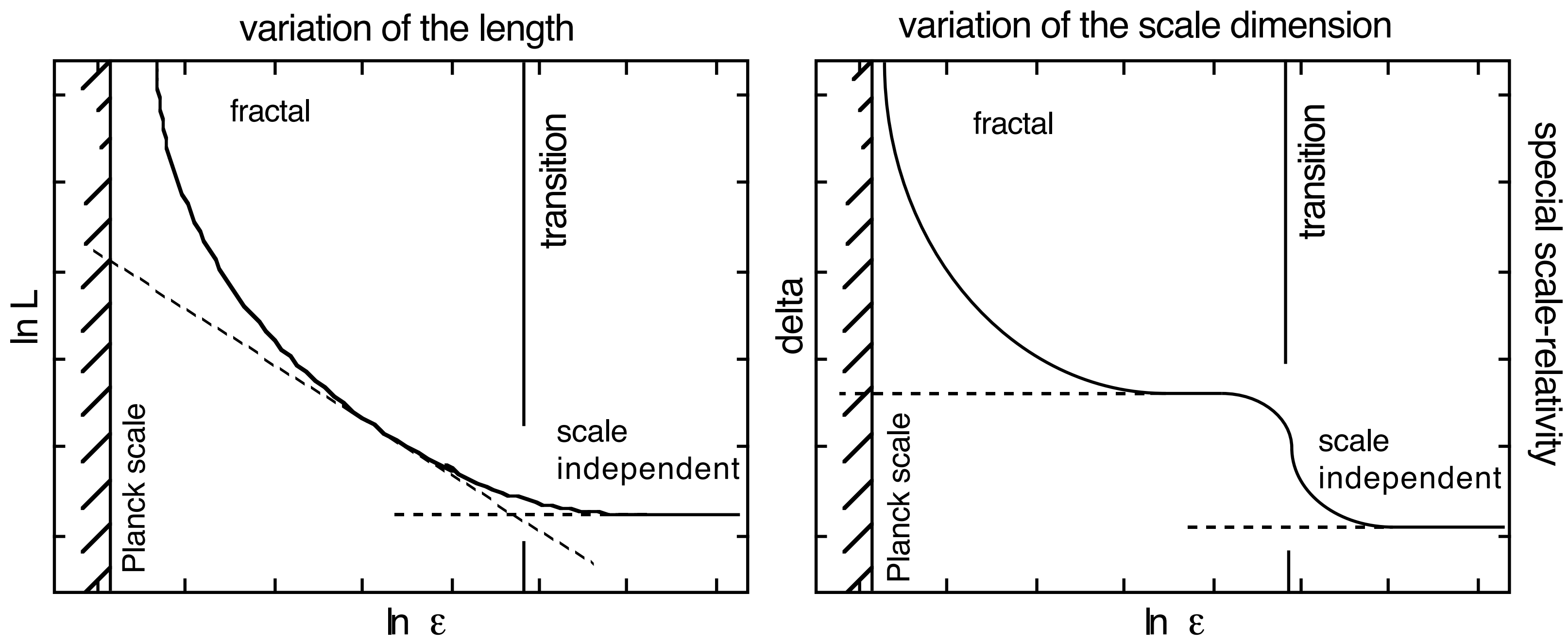
$$\ln\left(\frac{\lambda_Z}{r}\right) = \frac{\ln(m/m_Z)}{\sqrt{1+\ln^2(m/m_Z)/\ln^2(m_{\mathbb{P}}/m_Z)}}$$



Valide dans les deux cas (résolution ST et temps propre)

$$\ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) = \frac{\delta_0 \, \ln(\lambda_0/\varepsilon)}{\sqrt{1 - \ln^2(\lambda_0/\varepsilon)/\ln^2(\lambda_0/\mathbf{\Lambda})}} \qquad \delta(\varepsilon) = \frac{\delta_0}{\sqrt{1 - \ln^2(\lambda_0/\varepsilon)/\ln^2(\lambda_0/\mathbf{\Lambda})}}$$

(Cas simplifié : $\mathcal{L}(\lambda_0) = \mathcal{L}_0$)



Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective en relativité d'échelle restreinte (lois de dilatation log-lorentziennes)

Dynamique d’échelle: équations

Lois d’échelle solutions d’équations aux dérivées partielles du deuxième ordre dans l’espace des échelles

$\Updownarrow$

« djinn » (dimension d’échelle variable) identifié comme un « temps d’échelle» δ

Resolution identifiée comme une « vitesse d’échelle »:

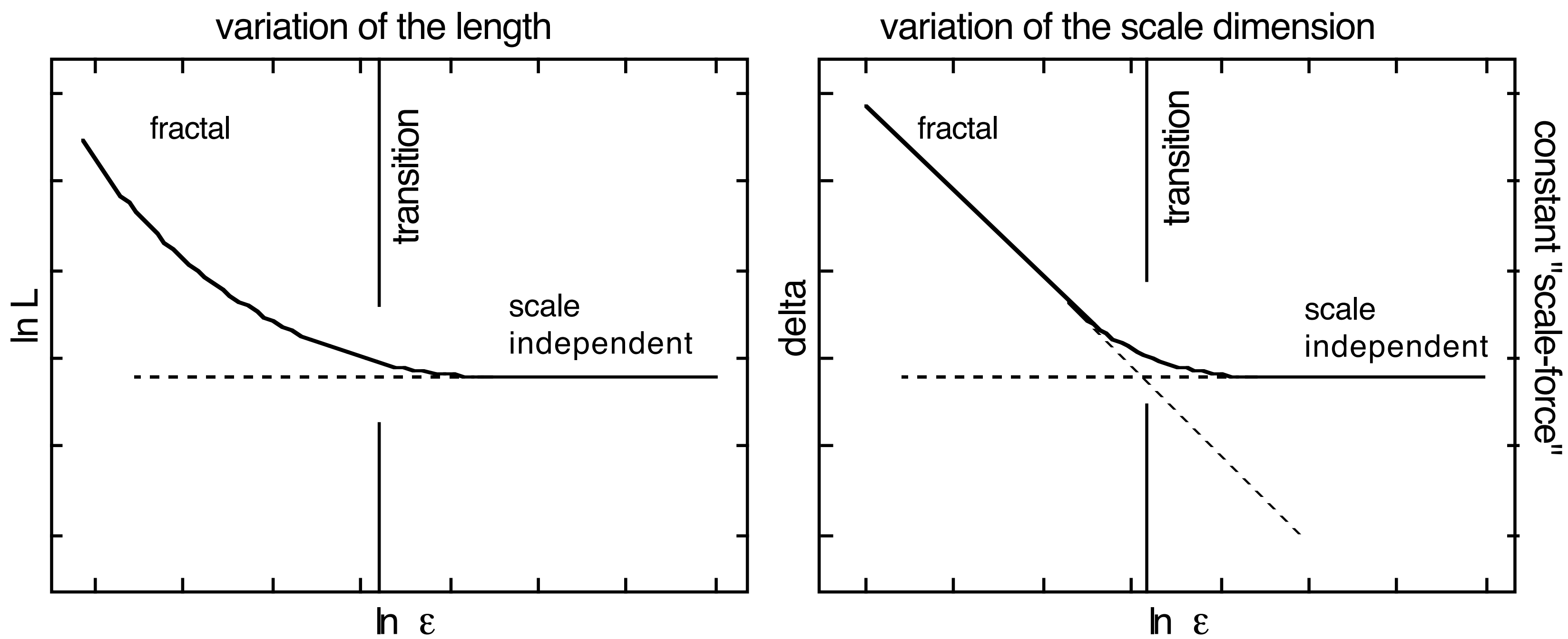
$$\ln\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) = \frac{d\ln\mathcal{L}}{d\delta}$$

Principe de moindre action dans l’espace des échelles —> équations d’échelle d’Euler Lagrange en fonction du « djinn »:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\delta}\frac{\partial L}{\partial\ln\varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial\ln\mathcal{L}}}$$

Dynamique d'échelle: force d'échelle constante

$$\ln\left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0}\right) = \frac{1}{2G}\ln^2\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \qquad \delta = \frac{1}{G}\ln\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)$$ (asymptotique)

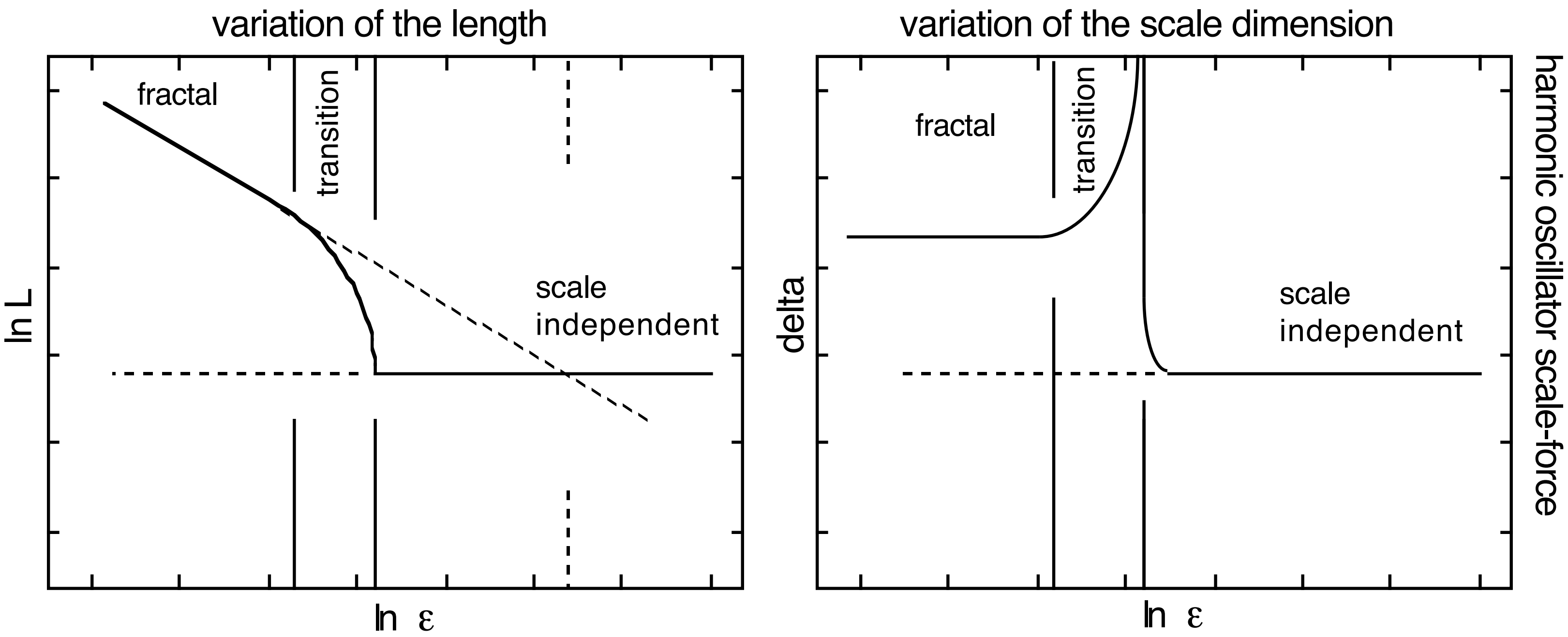


Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective dans le cas d'une 'force d'échelle' constante:

$$\boxed{\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d\,\delta^2} = G}$$

Dynamique d'échelle: oscillateur harmonique

$$\ln \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0} = \delta \sqrt{\ln^2\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\delta^2}}$$



Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective dans le cas d'un potentiel d'oscillateur harmonique (dans l'espace des échelles)

$$\boxed{\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d\,\delta^2} = \frac{1}{\delta_0^2} \ln \mathcal{L}}$$

Loi log-périodique à partir de la covariance d'échelle

Généralisation « covariante d'échelle » des fractals à dimension constante:

1. Equation différentielle d'échelle, D = cste: $$\frac{d\Phi}{d\ln\varepsilon} - D\Phi = 0$$

2. Introduction d'une correction (2è membre): $$\frac{d\Phi}{d\ln\varepsilon} - D\Phi = \chi$$

3. Covariance = invariance de forme des équations—> on postule que les équations en Φ et χ ont la même forme: $$\frac{d\chi}{d\ln\varepsilon} - D'\chi = 0$$

4. On pose $D' = D + \delta$, l'éq. devient: $$\frac{d^2\Phi}{(d\ln\varepsilon)^2} - B\frac{d\Phi}{d\ln\varepsilon} + C\Phi = 0$$

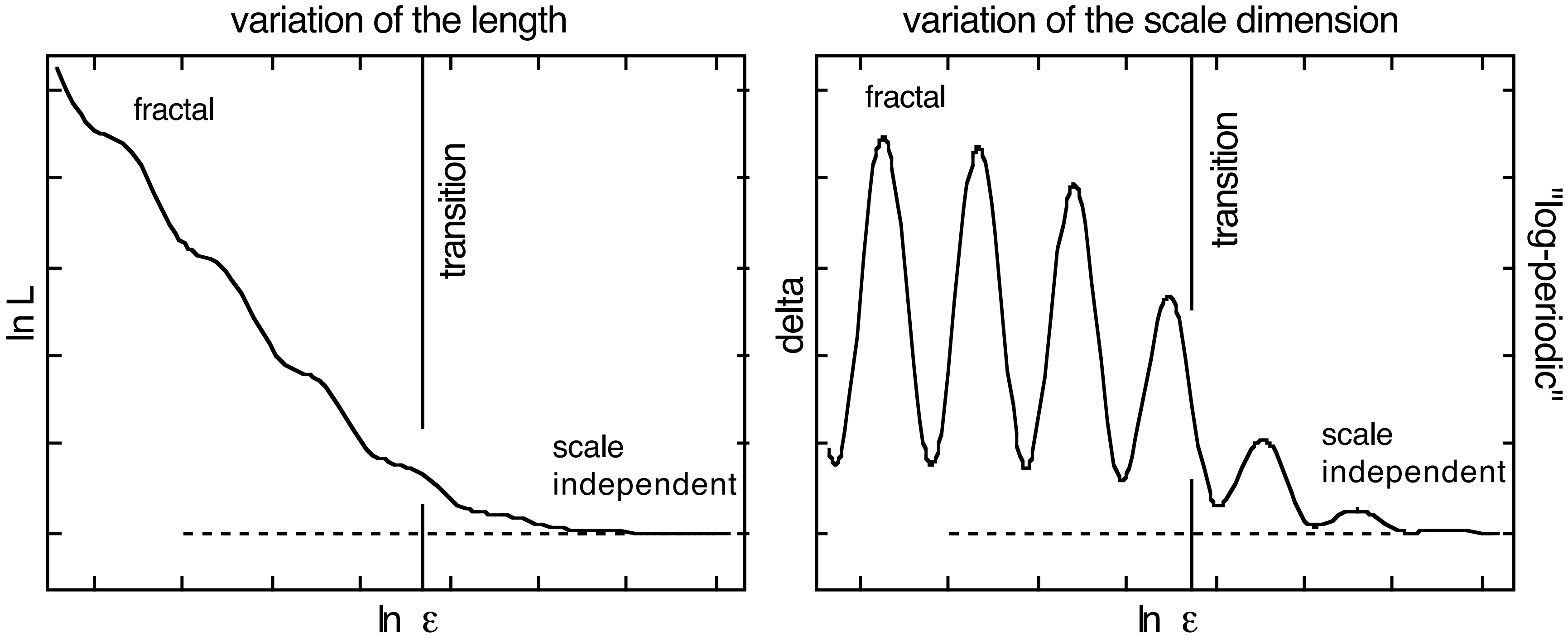
5. On pose $B = 2D + \delta, \quad C = D(D+\delta)$
—> solution: $$\boxed{\Phi(\varepsilon) = a\,\varepsilon^D(1 + b\varepsilon^\delta)}$$

6. Cas part. $\delta = i\omega$ —>log-per. $$\boxed{\Phi(\varepsilon) = a\varepsilon^D[1 + b\cos(\omega\ln\varepsilon)]}$$

Loi log-périodique

$$\mathcal{L}(\varepsilon) = \mathcal{L}_0[1 + (\lambda/\varepsilon)^{\nu}\, e^{b\cos(\omega \ln(\varepsilon/\lambda))}]$$

(Petites fluctuations)



Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective dans le cas d'un comportement log-périodique (invariance d'échelle discrète, exposant complexe) avec transition fractal / nonfractal.