Fondation de la Mécanique Quantique

Effets sur les équations du mouvement des structures fractales internes aux géodésiques

Laurent Nottale

CNRS

LUTH, Observatoire de Paris-Meudon

http ://luth.obspm.fr/~luthier/nottale/

Références

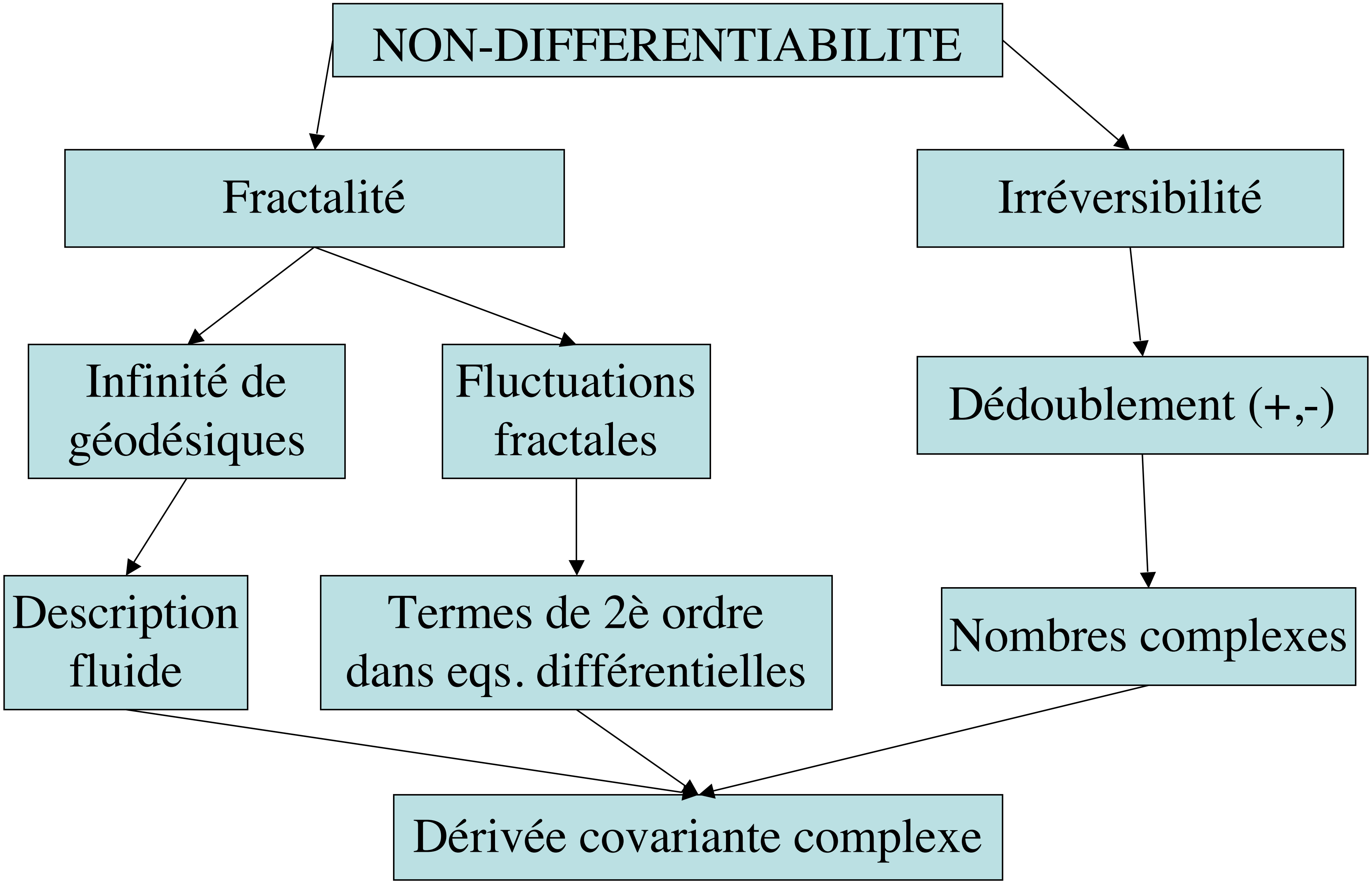
Nottale, L., 1993, Fractal Space-Time and Microphysics : Towards a Theory of Scale Relativity, World Scientific (Book, 347 pp.)
Chapter 5.6 : http ://luth.obspm.fr/~luthier/nottale/LIWOS5-6cor.pdf

Nottale, L., 1996, Chaos, Solitons & Fractals, 7, 877-938. “Scale Relativity and Fractal Space-Time : Application to Quantum Physics, Cosmo- logy and Chaotic systems”.
http ://luth.obspm.fr/~luthier/nottale/arRevFST.pdf

Nottale, L., 1997, Astron. Astrophys. 327, 867. “Scale relativity and Quantization of the Universe. I. Theoretical framework.” http ://luth.obspm.fr/~luthier/nottale/arA&A327.pdf

Célérier Nottale 2004 J. Phys. A 37, 931(arXiv : quant- ph/0609161)
“Quantum-classical transition in scale relativity”.
http ://luth.obspm.fr/~luthier/nottale/ardirac.pdf

Nottale L. & C élérier M.N., 2007, J. Phys. A : Math. Theor. 40, 14471-14498 (arXiv : 0711.2418 [quant-ph]).
“Derivation of the postulates of quantum mechanics form the first principles of scale relativity”.



$$\frac{\acute{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V}.\nabla - i\mathcal{D}\Delta$$

Opérateur de dilatation (méthode de Gell-Mann-Lévy):

$$\mathcal{L}(\varepsilon') = \mathcal{L}(\varepsilon + \varepsilon\, d\rho) = \mathcal{L}(\varepsilon) + \frac{\partial \mathcal{L}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\, \varepsilon\, d\rho = (1 + \tilde{D}\; d\rho)\, \mathcal{L}(\varepsilon),$$

$$\tilde{D} = \varepsilon\; \frac{\partial}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \ln \varepsilon}$$

Equation différentielle d'échelle du premier ordre:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \varepsilon)}{\partial \ln \varepsilon} = \beta(\mathcal{L})$$

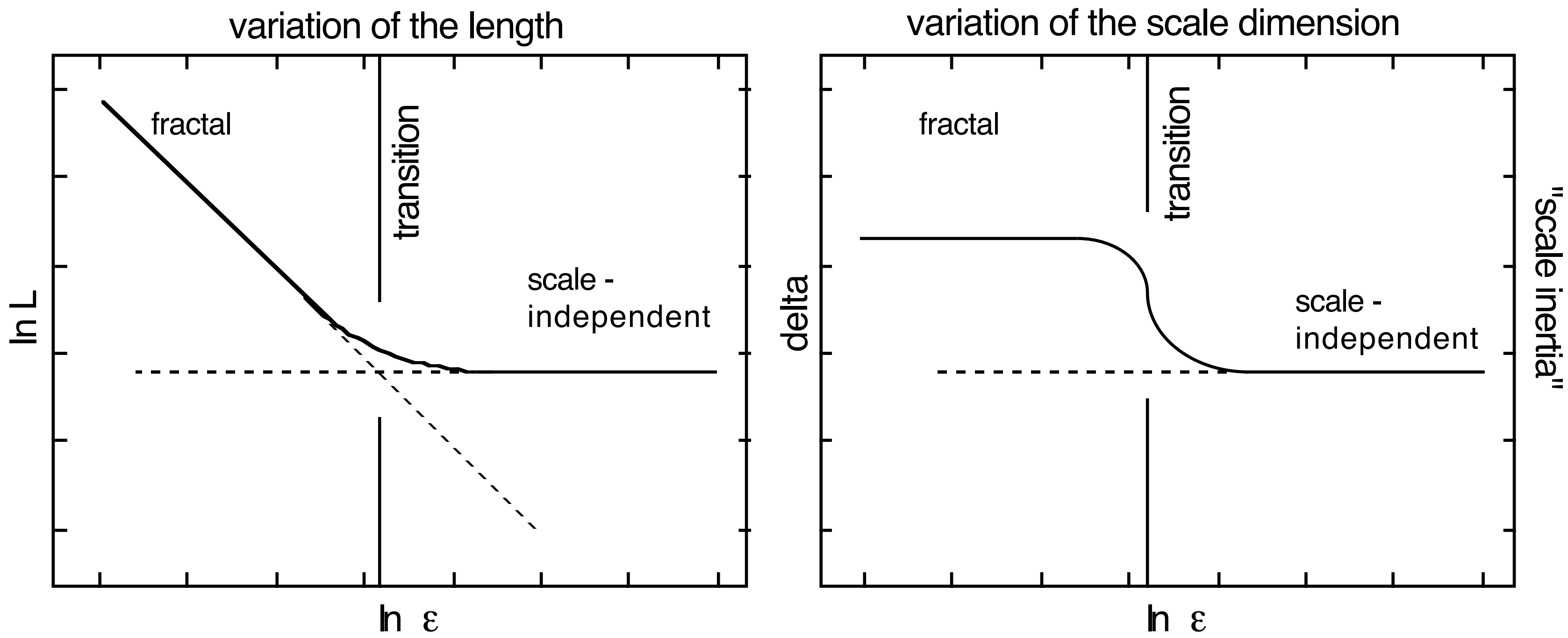
Développement limité:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \varepsilon)}{\partial \ln \varepsilon} = a + b\mathcal{L}$$

Solution: fractale de dimension constante + transition:

$$\mathcal{L}(x, \varepsilon) = \mathcal{L}_0(x)\; \left[1 + \zeta(x) \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{-b}\right]$$

$$\mathcal{L}(x,\varepsilon) = \mathcal{L}_0(x)\left[1 + \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\delta}\right] \qquad \delta_{\text{eff}} = \frac{\delta}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)^{\delta}}$$



Dépendence d’échelle de la longueur et de la dimension d’échelle effective

$$\delta = \frac{d \ln \mathcal{L}}{d \ln(\lambda/\varepsilon)} \quad = D_F - D_T$$

Cas de lois « inertielles d’échelle » (qui sont solutions d’une équation différentielle du premier ordre dans l’espace des échelles).

Groupe de Galilée d'échelle

Comportement asymptotique:

$$\mathcal{L}(x,\varepsilon) = \mathcal{L}_0(x)\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\delta}$$

Transformation d'échelle: $\varepsilon \to \varepsilon'$

$$\ln\frac{\mathcal{L}(\varepsilon')}{\mathcal{L}_0} = \ln\frac{\mathcal{L}(\varepsilon)}{\mathcal{L}_0} + \delta(\varepsilon)\ln\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)$$

$$\delta(\varepsilon') = \delta(\varepsilon)$$

Loi de composition des dilatations: $\varepsilon \to \varepsilon' \to \varepsilon''$

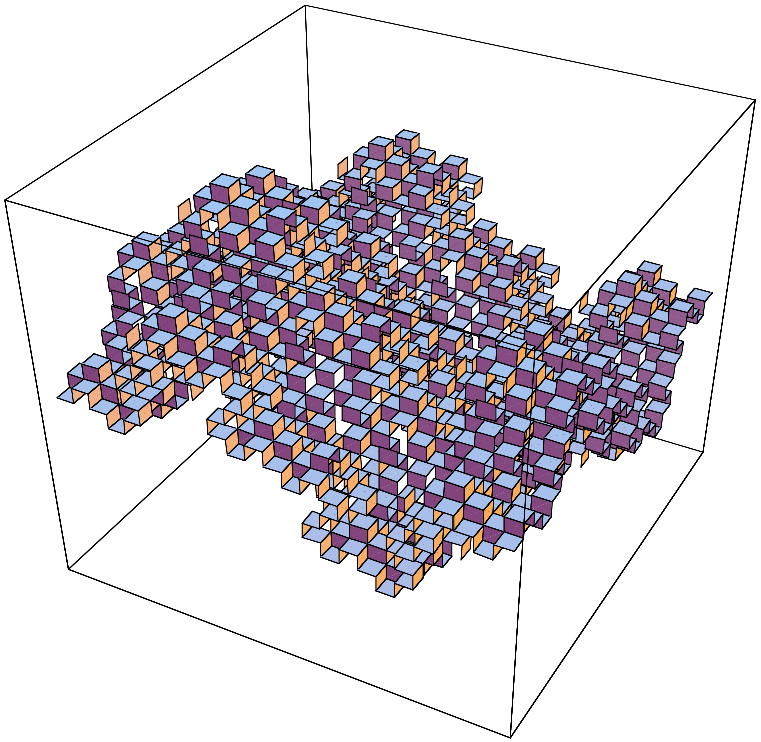
$$\ln\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon}\right) = \ln\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) + \ln\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)$$

Résultat: structure mathématique du groupe de Galilée —>

-satisfait au principe de relativité d'échelle-

$$X' = X - VT,\;\; T' = T,\;\; W = U + V$$

Voie vers Schrödinger (1): infinité de géodésiques



—> Approche « fluide »:

$$V(t) \rightarrow V[x(t,\delta t),t,\delta t] = v[x(t),t] + W[x(t,\delta t),t,\delta t]$$

Différentiable Non-différentiable

Voie vers Schrödinger (2): ‘partie classique’ (différentiable) et ‘partie fractale’

Loi d’échelle minimale (en fonction de la résolution spatiale):

$$\mathcal{L}(x,\varepsilon) = \mathcal{L}_0(x)\left[1 + \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\delta}\right] \qquad (\varepsilon_x/\lambda)^{D_F} = (\varepsilon_t/\lambda)$$

Version différentielle (en fonction de la résolution temporelle):

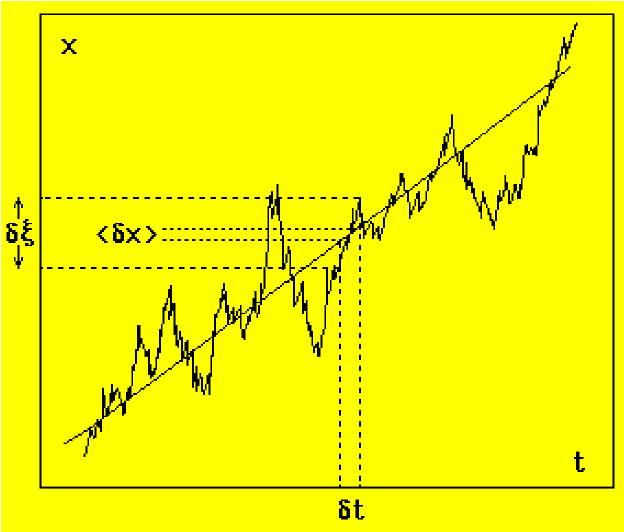
$$dX = dx + d\xi \qquad < \eta >= 0$$

$$dx = v\,dt \qquad < \eta^2 >= 1$$

$$d\xi = \eta\sqrt{2\mathcal{D}}(dt^2)^{1/2D_F}$$

Cas de la dimension fractale critique $D_F = 2$:

$$d\xi = \eta\sqrt{2\mathcal{D}}dt^{1/2}$$



Voie vers Schrödinger (3): non-différentiabilité —> complexes

Définition ordinaire de la dérivée:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{dt\to 0} \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt} = \lim_{dt\to 0} \frac{f(t) - f(t-dt)}{dt}$$

N'EXISTE PLUS (non-différentiabilité) ! —> nouvelle définition:

f(*t*,*dt*) = fonction fractale:

fonction explicite de *dt*, variable d'échelle (« résolution »)

$$f'_+(t, dt) = \frac{f(t+dt, dt) - f(t, dt)}{dt} \qquad f'_-(t, dt) = \frac{f(t, dt) - f(t-dt, dt)}{dt}$$

Deux définitions au lieu d'une: on passe de l'une à l'autre par la réflexion *dt* <—> -*dt*

$$\left. \begin{aligned} dX_+(t) &= v_+ \; dt + d\xi_+(t) \\ dX_-(t) &= v_- \; dt + d\xi_-(t) \end{aligned} \right| \qquad \mathcal{V} = \frac{v_+ + v_-}{2} - i\,\frac{v_+ - v_-}{2}$$

Opérateur de dérivation covariante

$$\frac{d'}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d_+}{dt} + \frac{d_-}{dt}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{d_+}{dt} - \frac{d_-}{dt}\right)$$

Partie
Classique
(différentiable)

$$\mathcal{V} = \frac{d'}{dt}x(t) = V - iU = \frac{v_+ + v_-}{2} - i\ \frac{v_+ - v_-}{2}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dX_i}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\frac{dX_i dX_j}{dt}$$

$$< \frac{dX_i}{dt} >= \frac{dx_i}{dt} \qquad < \frac{dX_i dX_j}{dt} >=< \frac{d\xi_i d\xi_j}{dt} >= 2\mathcal{D}\,\delta_{ij}$$

$$\frac{d_\pm f}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_\pm.\nabla \pm \mathcal{D}\,\Delta\right) f$$

$$\boxed{\frac{d'}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V}.\nabla - i\mathcal{D}\Delta}$$

Amélioration de la covariance « quantique »

Ref.: Nottale L., 2004, American Institute of Physics Conference Proceedings 718, 68-95
"The Theory of Scale Relativity : Non-Differentiable Geometry and Fractal Space- Time".
http ://luth.obspm.fr/~luthier/nottale/arcasys03.pdf

On introduit l'opérateur de vitesse complexe:

$$\widehat{\mathcal{V}} = \mathcal{V} - i\mathcal{D}\nabla$$

En terme de cet opérateur, la dérivée covariante-quantique s'écrit:

$$\frac{\widehat{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\mathcal{V}}.\nabla$$

Elle satisfait alors à la règle de Leibniz *du premier ordre* pour les dérivées partielles et la composition de fonction.

RELATIVITE D'ECHELLE –>MECANIQUE QUANTIQUE

Opérateur de dérivation covariante

$$\frac{\acute{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V}.\nabla - i\mathcal{D}\Delta$$

Equation fondamentale de la dynamique

$$\frac{\acute{d}\,\mathcal{V}}{dt} = -\nabla\phi$$

Changement de variables (S = action complexe) et intégration

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \mathcal{V}, t)dt \qquad \psi = e^{i\mathcal{S}/2m\mathcal{D}}$$

Equation de Schrödinger généralisée

$$\mathcal{D}^2\Delta\psi + i\mathcal{D}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}\phi\,\psi = 0$$

Hamiltonien: forme covariante

$\mathcal{P} = -i\mathcal{S}_0 \nabla \ln \psi$ $\qquad$ $\mathcal{P}\psi = -i\hbar \nabla \psi$

$$\mathcal{L} = \frac{\widehat{d}\,\mathcal{S}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \widehat{\mathcal{V}}.\nabla \mathcal{S}$$

$\mathcal{P} = \nabla \mathcal{S}$ $\qquad$ $\mathcal{H} = -\partial \mathcal{S}/\partial t$

$$\boxed{\mathcal{H} = \widehat{\mathcal{V}}.\mathcal{P} - \mathcal{L}}$$

—> $\qquad$ $\mathcal{H} = \mathcal{V}.\mathcal{P} - i\mathcal{D}\nabla.\mathcal{P} - \mathcal{L}$

Il existe un terme d'énergie supplémentaire spécifique de la mécanique quantique: il est expliqué ici comme manifestation de la nondifférentiabilité et de la covariance forte

Newton

$$m\frac{\acute{d}}{dt}\mathcal{V} = -\nabla\Phi$$

$$\mathcal{V} = \nabla\mathcal{S}/m$$

$$\psi = e^{i\mathcal{S}/\mathcal{S}_0}$$

$$\mathcal{V} = -i\,\frac{\mathcal{S}_0}{m}\,\nabla(\ln\psi)$$

$$i\mathcal{S}_0\frac{\acute{d}}{dt}(\nabla\ln\psi) = \nabla\Phi$$

$$\nabla\Phi = i\mathcal{S}_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V}.\nabla - i\mathcal{D}\Delta\right)(\nabla\ln\psi)$$

$$\nabla\Phi = i\mathcal{S}_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\nabla\ln\psi - i\left\{\frac{\mathcal{S}_0}{m}(\nabla\ln\psi.\nabla)(\nabla\ln\psi) + \mathcal{D}\Delta(\nabla\ln\psi)\right\}\right]$$

$$\frac{\acute{d}}{dt}\mathcal{V} = -2\mathcal{D}\nabla\left\{i\frac{\partial}{\partial t}\ln\psi + \mathcal{D}\frac{\Delta\psi}{\psi}\right\} = -\nabla\Phi/m$$

$$\mathcal{S}_0 = 2m\mathcal{D}$$

Schrödinger

$$\mathcal{D}^2\Delta\psi + i\mathcal{D}\frac{\partial}{\partial t}\psi - \frac{\Phi}{2m}\psi = 0$$

Newton

$$\boxed{m\frac{\hat{d}}{dt}\mathcal{V} = -\nabla\Phi}$$

$$\mathcal{V} = \nabla\mathcal{S}/m$$

$$\psi = e^{i\mathcal{S}/\mathcal{S}_0}$$

$$\boxed{\mathcal{V} = -i\,\frac{\mathcal{S}_0}{m}\,\nabla(\ln\psi)}$$

$$\boxed{i\mathcal{S}_0\frac{\hat{d}}{dt}(\nabla\ln\psi) = \nabla\Phi}$$

$$\boxed{\nabla\Phi = i\mathcal{S}_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V}.\nabla - i\mathcal{D}\Delta\right)(\nabla\ln\psi)}$$

$$\boxed{\nabla\Phi = i\mathcal{S}_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\nabla\ln\psi - i\left\{\boxed{\frac{\mathcal{S}_0}{m}}(\nabla\ln\psi.\nabla)(\nabla\ln\psi) + \boxed{\mathcal{D}}\Delta(\nabla\ln\psi)\right\}\right]}$$

$$\boxed{\frac{\hat{d}}{dt}\mathcal{V} = -2\mathcal{D}\nabla\left\{i\frac{\partial}{\partial t}\ln\psi + \mathcal{D}\frac{\Delta\psi}{\psi}\right\} = -\nabla\Phi/m}$$

$$\boxed{\mathcal{S}_0 = 2m\mathcal{D}}$$

$$\boxed{\mathcal{D}^2\Delta\psi + i\mathcal{D}\frac{\partial}{\partial t}\psi - \frac{\Phi}{2m}\psi = 0}$$

Schrödinger

$$\boxed{H\psi = i\,2m\mathcal{D}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}}$$

Origine des nombres complexes en mécanique quantique. 1.

Dédoublement du champ de vitesse —> nécessité de définir un nouveau produit: doublement d'algèbre A—>A^2

Forme générale d'un produit bilinéaire (LN, 1972) :

$$c^k = a^i \, \omega_{ij}^k \, b^j$$

i,j,k = 1,2 —> le nouveau produit est défini par les 8 nombres ω_{ij}^k

Contrainte: retrouver la limite standard —>A est une sous-algèbre de A^2

Donc (a,0)=a. On définit (0,1)=α. Le problème se réduit alors à déterminer 2 coefficients:

$$\alpha^2 = \omega_0 + \omega_1 \alpha$$

Nombres complexes. Origine en MQ. 2.

On redéfinit alors le doublet de vitesse, en incluant la « partie fractale » (nondifférentiable, divergente):

$$\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V} + \mathcal{W} = \left(\frac{v_+ + v_-}{2} - \alpha\,\frac{v_+ - v_-}{2}\right) + \left(\frac{w_+ + w_-}{2} - \alpha\,\frac{w_+ - w_-}{2}\right)$$

Fonction de Lagrange complète (cas Newtonien)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \,\langle (\mathcal{V} + \mathcal{W})^2 \rangle = \frac{1}{2} m \,\left(\langle \mathcal{V}^2 \rangle + \langle \mathcal{W}^2 \rangle \right)$$

Apparition d'un terme infini dans la fonction de Lagrange:

$$4\,\langle \mathcal{W}^2 \rangle = \langle [(w_+ + w_-) - \alpha\,(w_+ - w_-)]^2 \rangle$$
$$= \langle (w_+^2 + w_-^2)(1+\alpha^2) - 2\alpha(w_+^2 - w_-^2) + 2w_+w_-(1-\alpha^2) \rangle$$

Comme $\langle w_+^2 \rangle - \langle w_-^2 \rangle = 0$ et $\langle w_+ w_- \rangle = 0$

—> le terme infini est supprimé à condition que:

$$\boxed{\alpha^2 + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm i}$$

QED

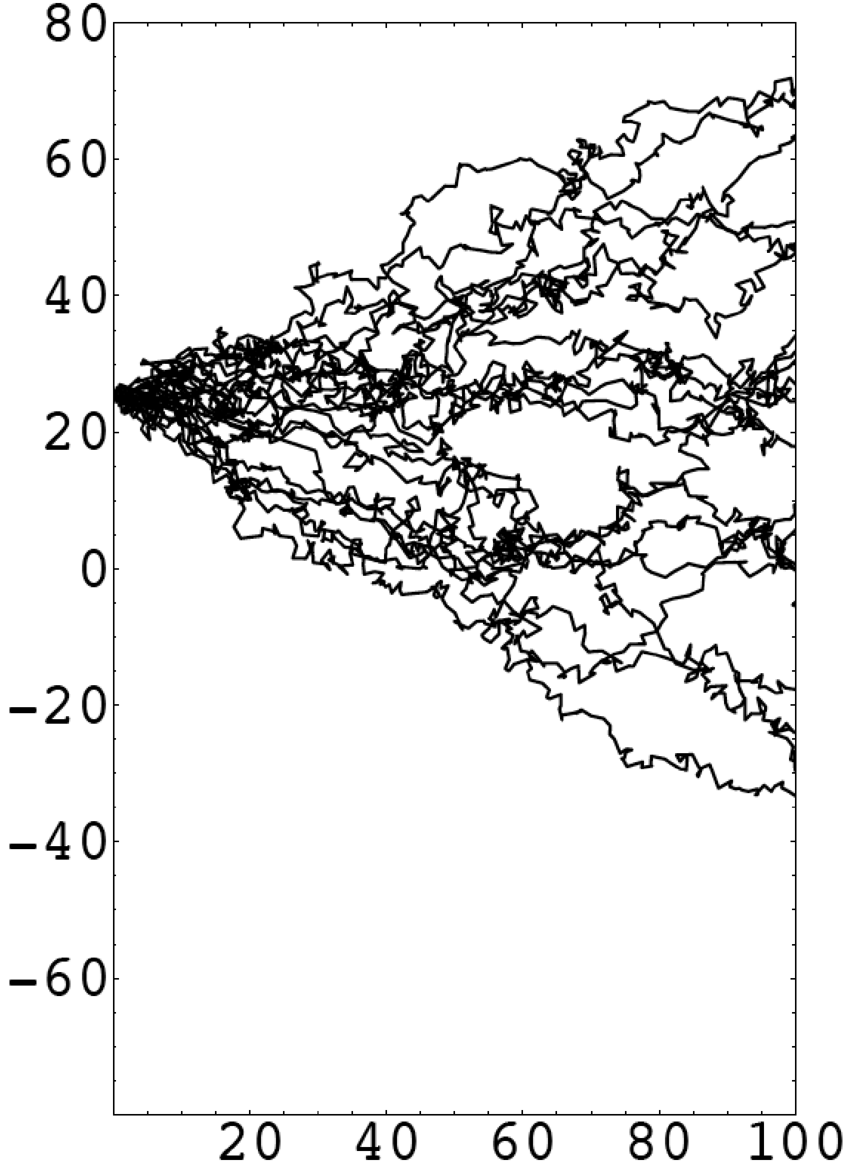
SOLUTIONS
Visualisations, simulations

Equations différentielles stochastiques pour les géodésiques

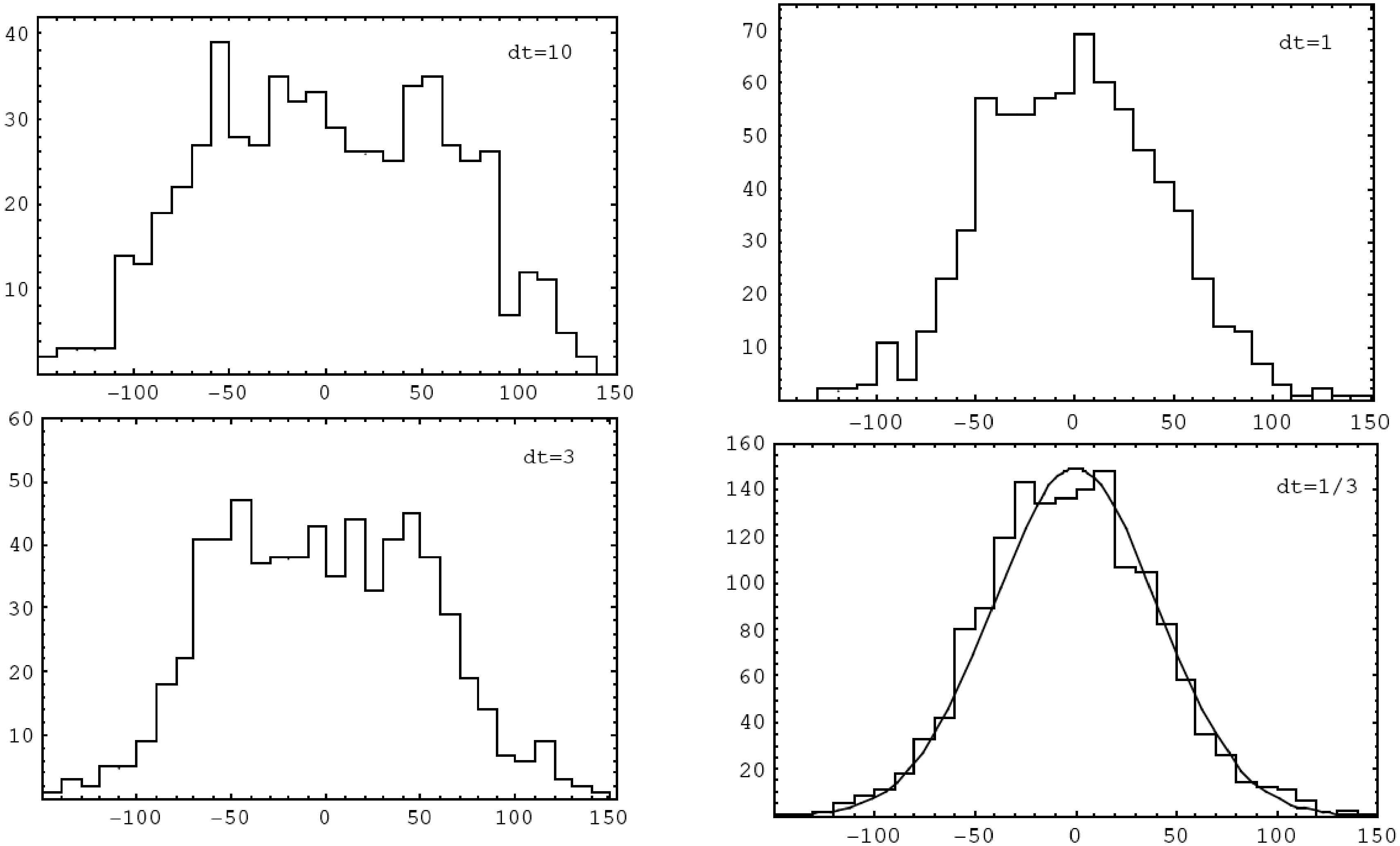
$$
\begin{aligned}
dx &= v_+ dt + d\xi_+, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \mathrm{div}(P v_+) = \mathcal{D}\Delta P : \ \text{Fokker} - \text{Planck.} \\
dx &= v_- dt + d\xi_-, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \mathrm{div}(P v_-) = -\mathcal{D}\Delta P : \ \text{no classical process.} \\
dx &= V dt + d\xi_V, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \mathrm{div}(P V) = 0 : \ \text{continuity equation.} \\
dx &= U dt + d\xi_U, \quad \mathrm{div}(P U) = \mathcal{D}\Delta P : \ \text{no classical process.} \qquad (1
\end{aligned}
$$

Expérience de fentes d'Young: une fente ouverte

Simulation
De géodésiques

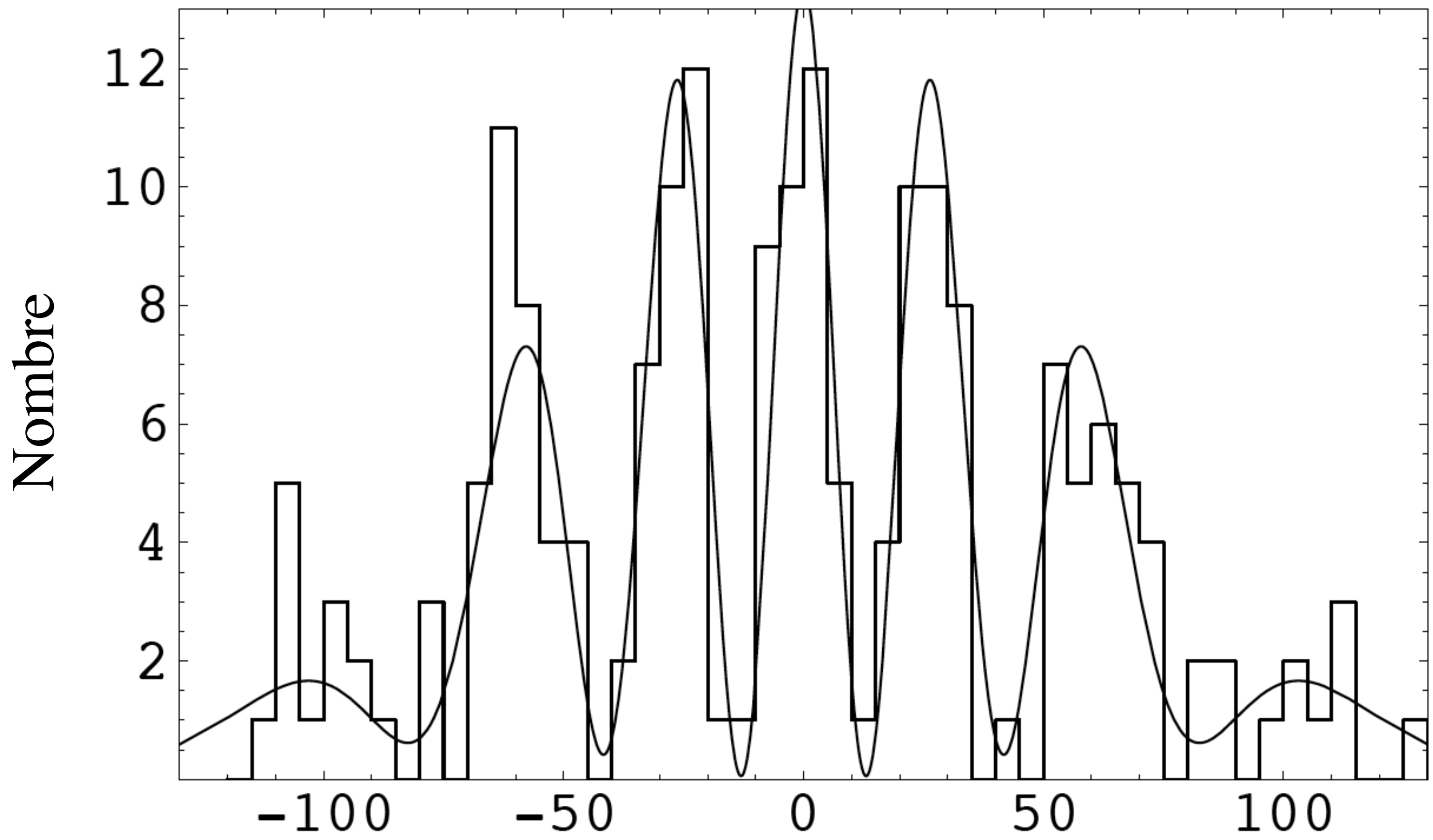


Expérience de fentes d'Young: une fente



Simulation dépendante-d'échelle: transition qunatique-classique

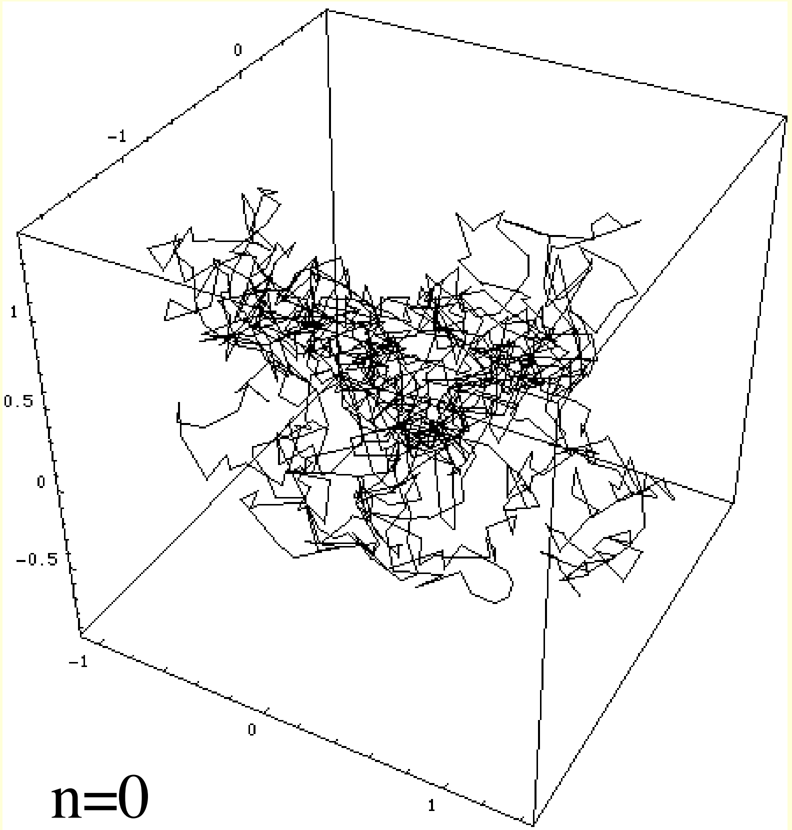
Expérience de fentes d'Young: 2 fentes



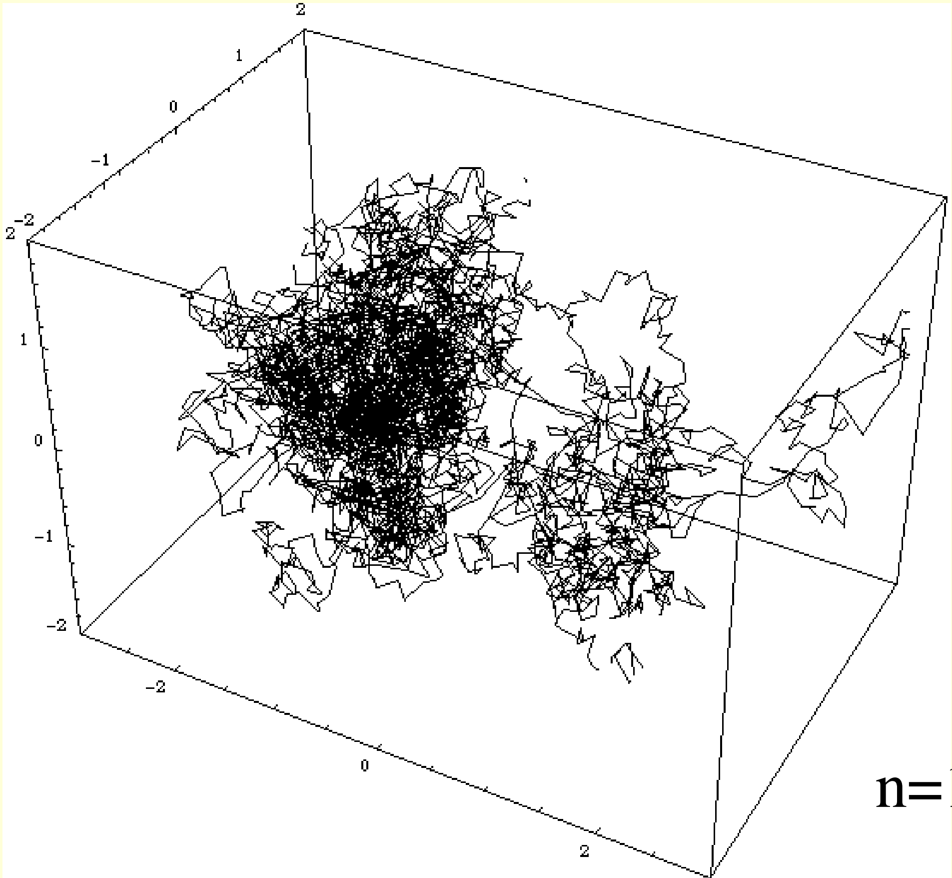
Simulation faible nombre de géodésiques. Comparaison à la prédiction quantique

Oscillateur harmonique 3D isotrope

simulation du processus $dx^k = v^k_+ \, dt + d\xi^k_+$



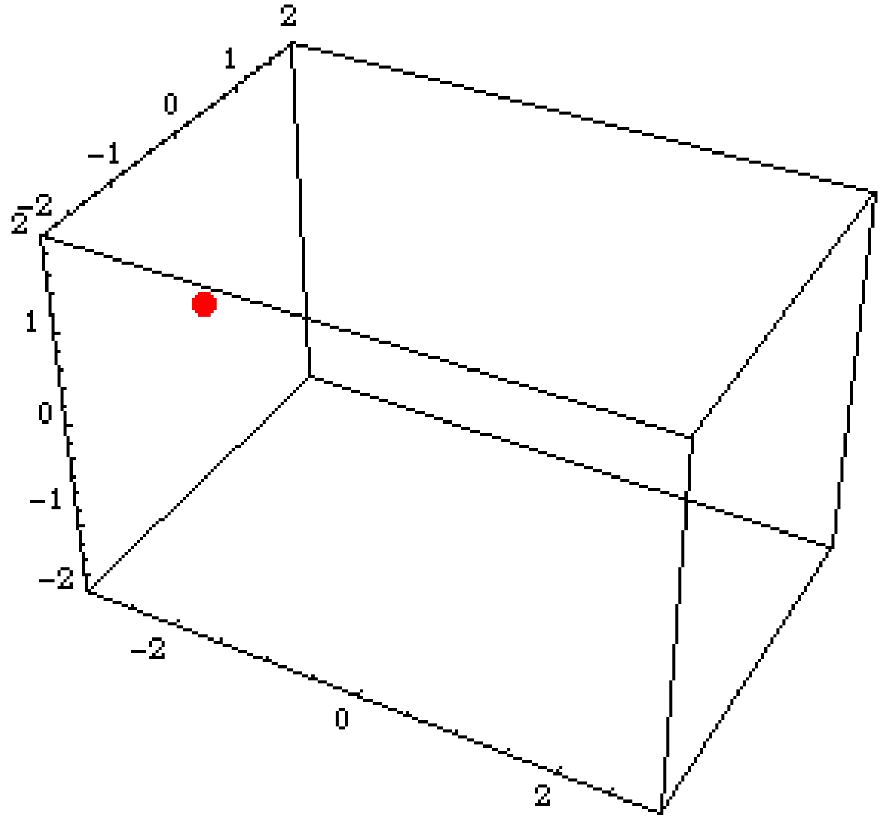
n=0



n=1

Exemples de géodésiques

Potentiel d'oscillateur harmonique 3D isotrope

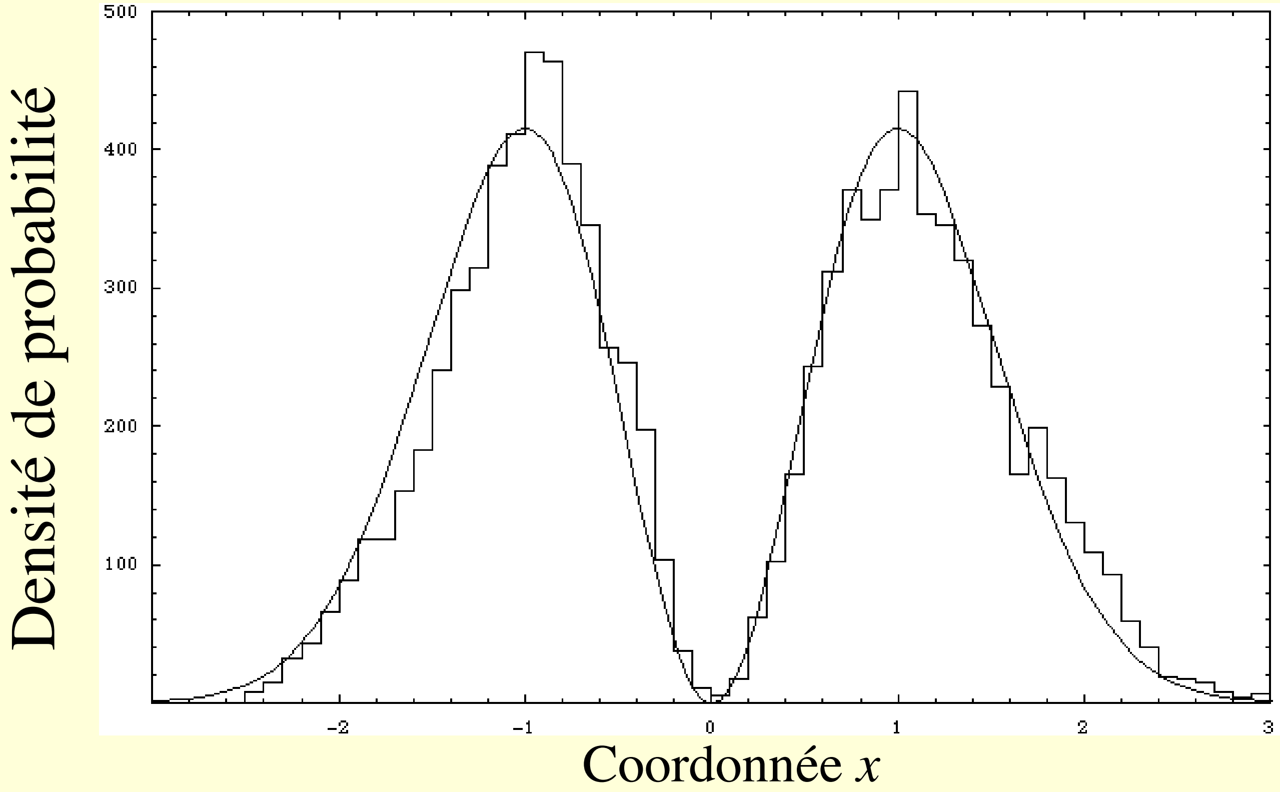


Premier niveau excité: simulation du processus $dx = v_+ \, dt + d\xi_+$

Animation

Potentiel d'oscillateur harmonique 3D isotrope

Premier niveau excité: simulation du processus $dx = v_+ \, dt + d\xi_+$



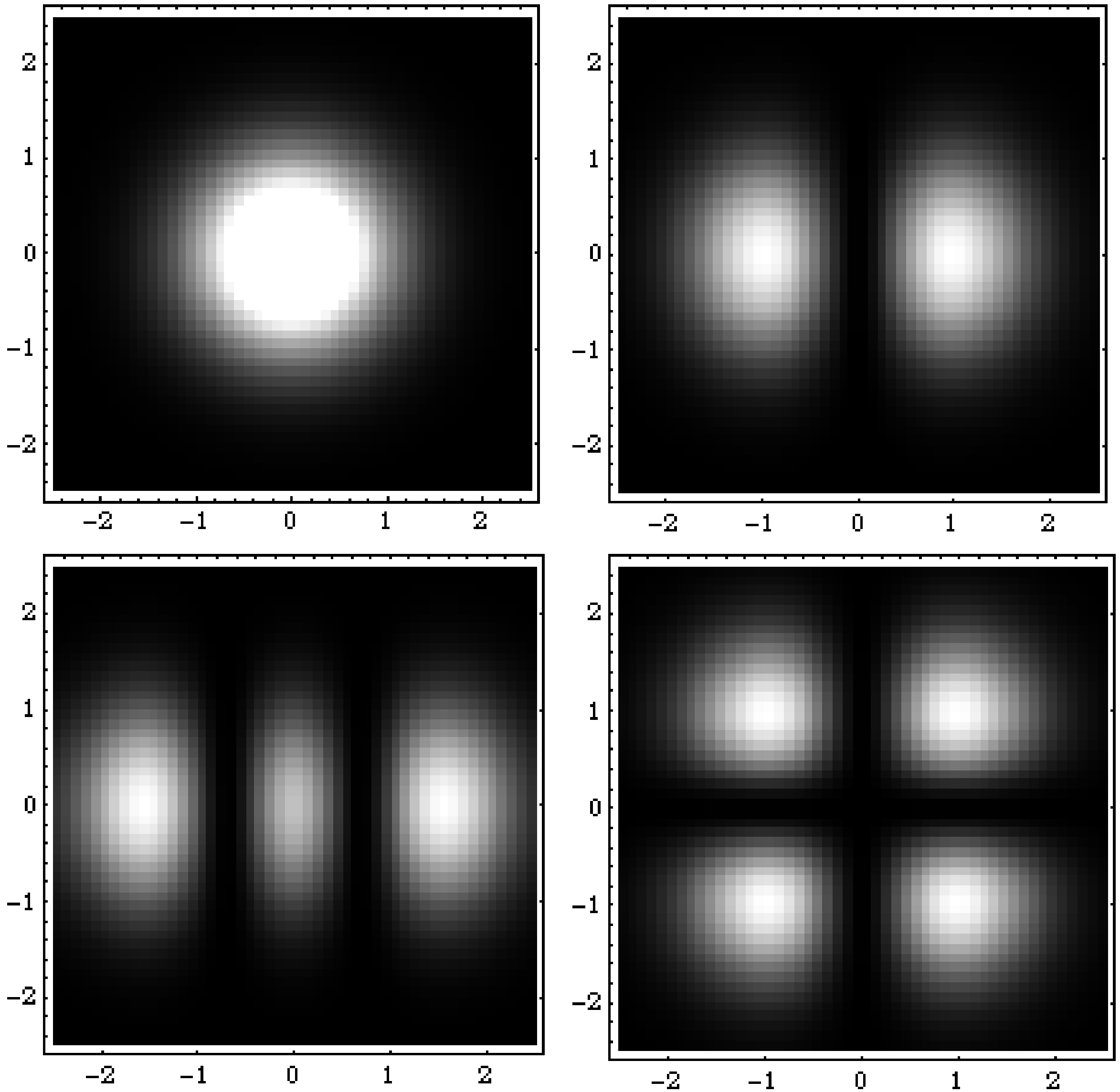
Comparaison simulation - prédiction MQ: 10000 pts, 2 géodésiques

Solutions: potentiel d'oscillateur harmonique 3D (densité cste)

$$E = (3+2n)\, mD\omega$$

n=0

n=1

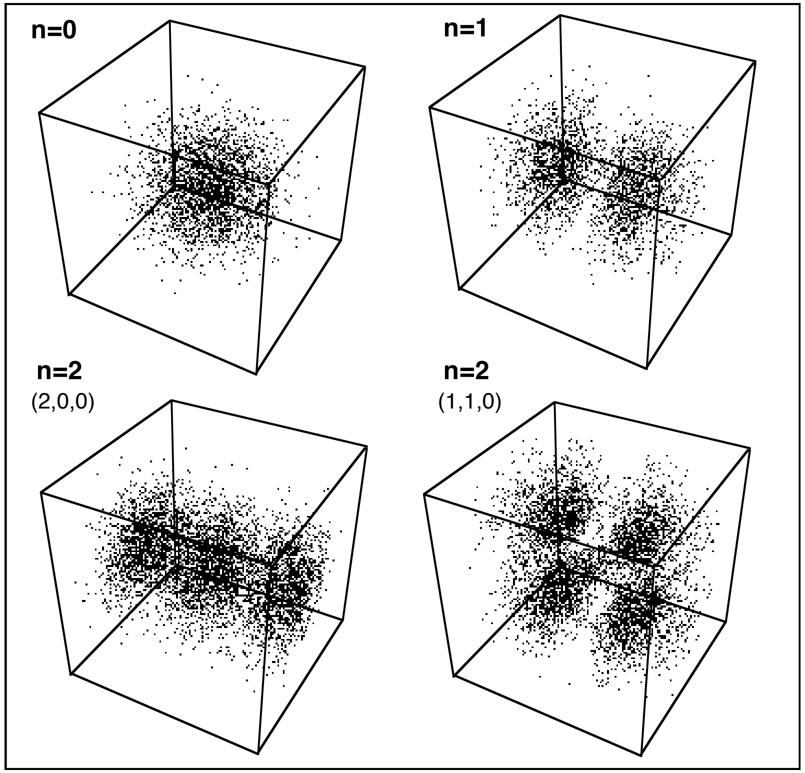


n=2
(2,0,0)

n=2
(1,1,0)

Polynômes d'Hermite

Solutions: potentiel d'oscillateur harmonique 3D



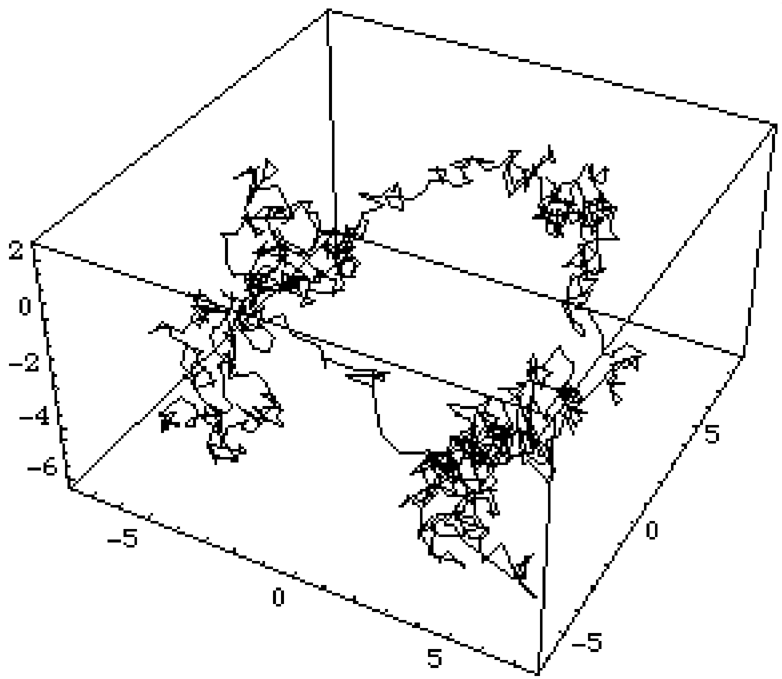
Simulation de géodésique

Potentiel képlerien GM/r
Etat $n = 3$, $l = m = n$-1

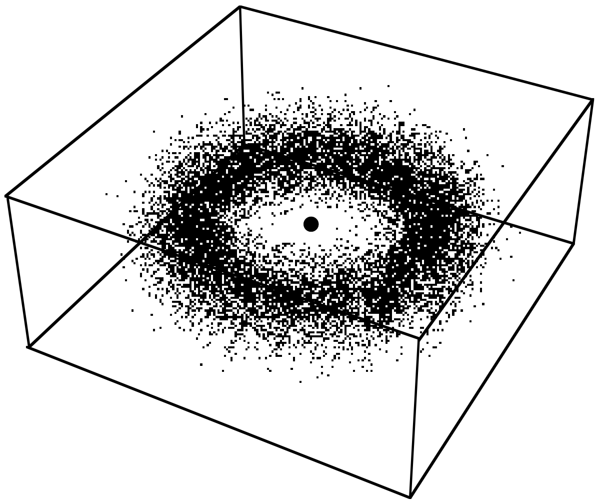
$$dx = v_+ dt + \eta\sqrt{2\mathcal{D}dt}$$

$$v_+ = U + V \qquad \mathcal{V} = V - iU$$

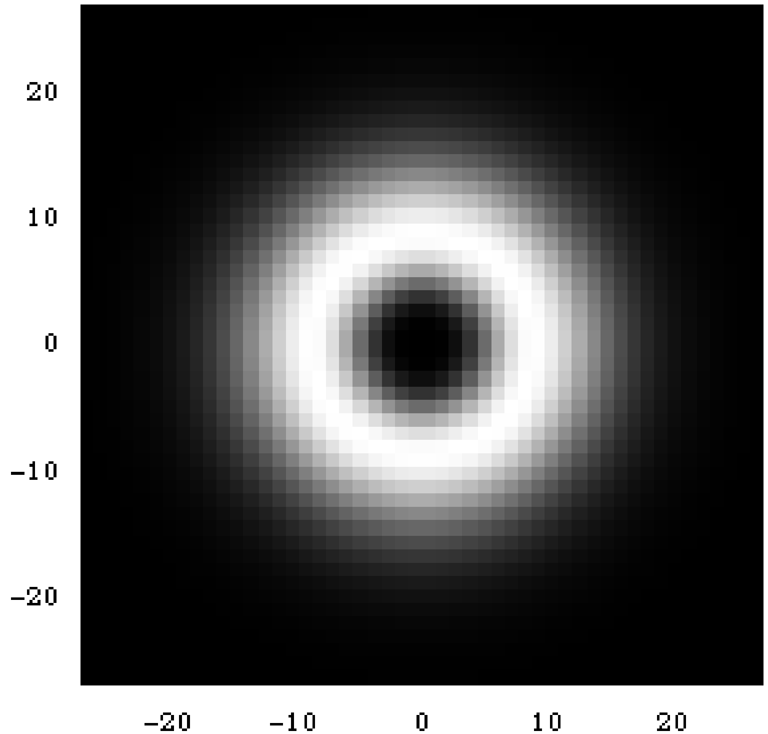
$$< \eta >= 0, \quad < \eta^2 >= 1$$



Solutions: potentiel Képlerien

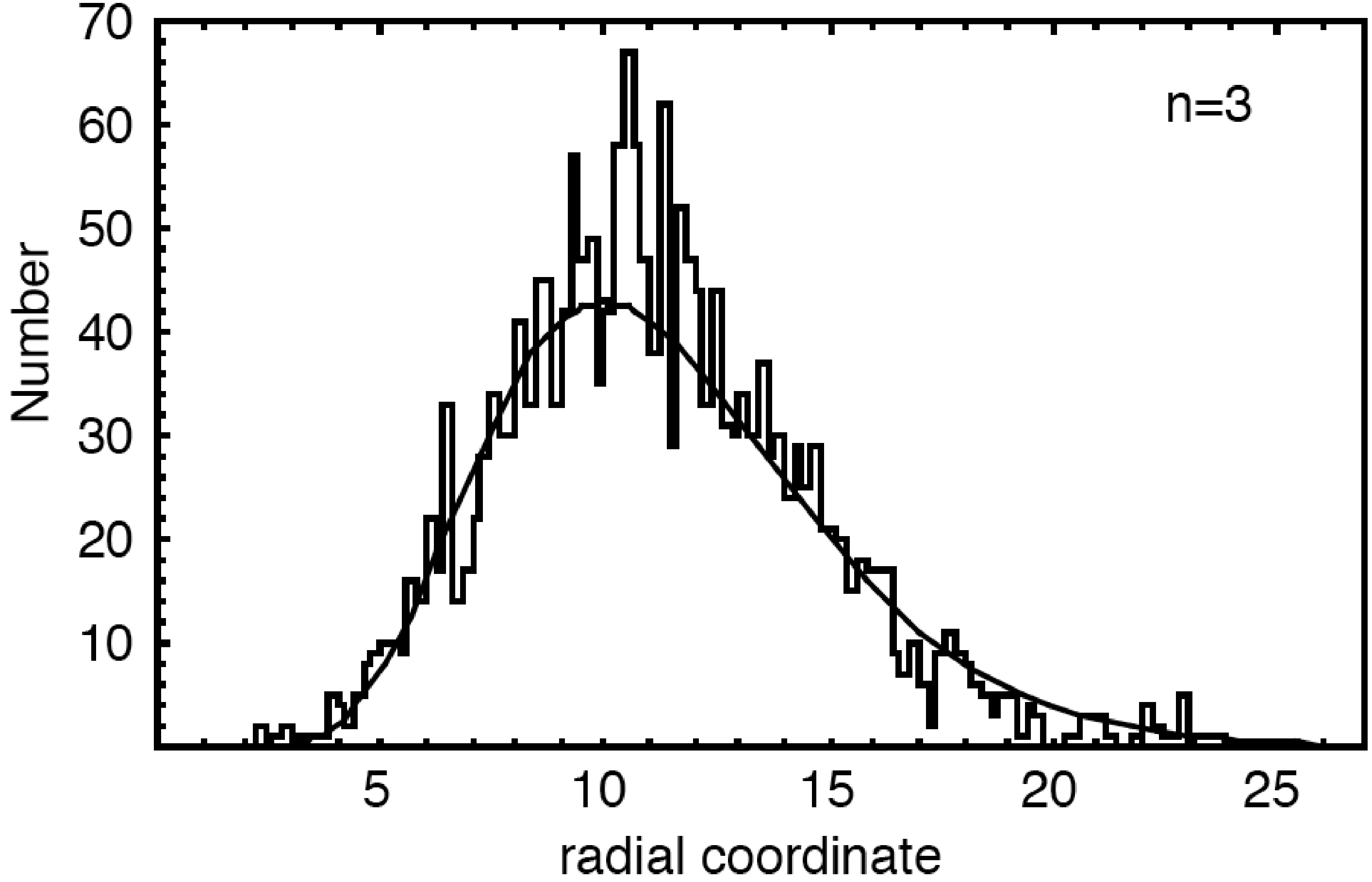


n=3



Polynômes de Laguerre généralisés

Atome d'hydrogène



Distribution obtenue à partir *d'une seule géodésique*, comparée à la distribution théorique prévue par l'équation de Schrödinger