symbolique quantique pour la logique

« EIGENLOGIC »

ZENO TOFFANO

CENTRALE-SUPELEC

INTRODUCTION
HISTORIQUE: REPRÉSENTATIONS ALGÉBRIQUES ET GÉOMÉTRIQUES EN LOGIQUE
LOGIQUE BINAIRE ARITHMÉTIQUE
DIAGRAMMES LOGIQUES
OBSERVABLES QUANTIQUES: ÉTATS ET MESURES
OBSERVABLES PROJECTIVES LOGIQUES: LE « 0 » ET LE « 1 »
OBSERVABLES ISOMÉTRIQUES LOGIQUES: PAULI ET SPIN ½
LOGIQUE FLOUE: VALEUR MOYENNE DE VÉRITÉ
LOGIQUE MULTIVALUÉE: ANALOGIE AVEC LE MOMENT CINÉTIQUE QUANTIQUE
CONCLUSION ET PERSPECTIVES

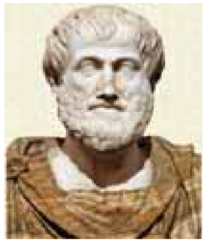
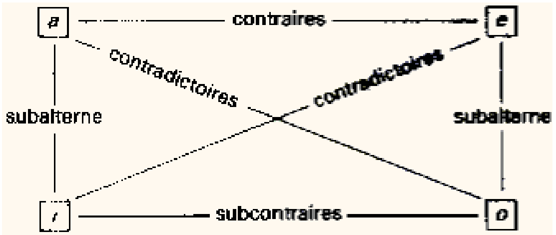
Plan

Introduction

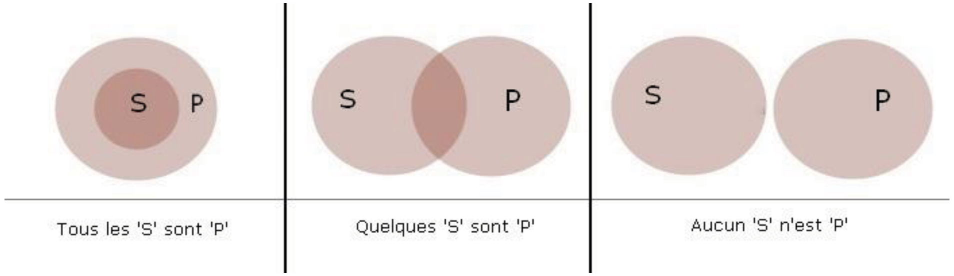
- « vision » géométrique de la logique
- utilisation de l'algèbre linéaire: valeurs/vecteurs propres, produit de Kronecker…
- lien naturel avec les observables quantiques…
- potentiel d'applications: logique floue, logique multivaluée, décision, portes quantiques…
- travail sur la décomposition polynomiale et la logique multivaluée mené en collaboration avec François DUBOIS (papier soumis à QI-2016)

historique : représentations algébriques et géométriques en logique

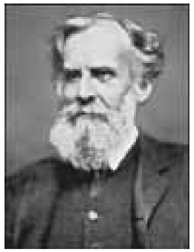
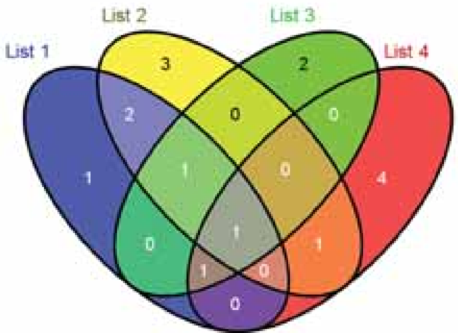
historique
« diagrammes logiques »

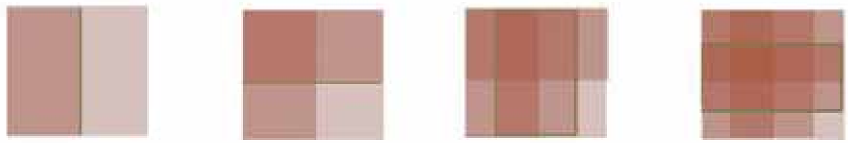
carré des oppositions d'Aristote (384-322 a.C)

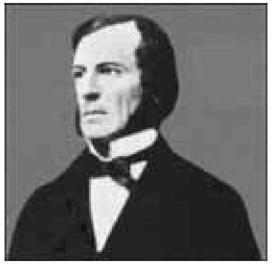
diagrammes de Leonhard Euler (1707-1783)

diagrammes de John Venn (1834-1923)

diagrammes de C. L. Dodgson (Lewis Carroll) (1832-1898)



historique

George Boole (1815 – 1864): le “0” et le “1”

Donne une symbolique mathématique à travers deux nombres {0,1} représentant respectivement le caractère « faux » ou « vrai » d'une proposition.*

L'algèbre utilisée par Boole n'était pas ce qu'aujourd'hui on nomme « Algèbre de Boole » (« Boolean Algebra »)** mais une forme arithmétique utilisant des variables idempotentes.

Une variable x ne prenant que les deux valeurs {0,1} est idempotente (pour le produit) si :

$$x^2 = x$$

* *George Boole, “The Mathematical Analysis of Logic, being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning” (1847);*
“An investigation of Laws of Thought on which are founded the mathematical theories of Logic and Probabilities” (1854).

** *Theodore Halperin, “Boole's Algebra isn't Boolean Algebra. A Description Using Modern Algebra, of What Boole Really Did Create” J. Gasser (ed.), A Boole Anthology, 61-77, Kluwer Academic Publishers, (2000)*

historique

Tables de vérité: Pierce, Post et Wittgenstein.

"Truth tables were introduced by Charles Sanders Peirce (1839-1914) in the early 1880's in the American Journal of Mathematics which, attracted little attention at the time"

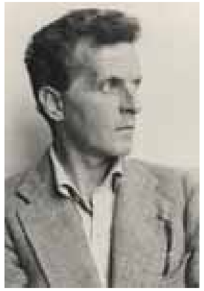
"Truth tables were rediscovered and tautologies discovered, simultaneously and independently

by Emil L. Post (1897-1954)

and by Ludwig Wittgenstein (1889-1951)"

"Reminiscences of the Vienna Circle and the Mathemathical Colloquium": Karl Menger

(W W W W)	(p, q)	Tautologie (Wenn p, so p; und wenn q, so q.)	$(p \supset p \,.\, q \supset q)$
(F W W W)	(p, q)	in Worten: Nicht beides p und q.	$(\sim(p \,.\, q))$
(W F W W)	(p, q)	„ „ : Wenn q, so p.	$(q \supset p)$
(W W F W)	(p, q)	„ „ : Wenn p, so q.	$(p \supset q)$
(W W W F)	(p, q)	„ „ : p oder q.	$(p \vee q)$
(F F W W)	(p, q)	„ „ : Nicht q.	$(\sim q)$
(F W F W)	(p, q)	„ „ : Nicht p.	$(\sim p)$
(F W W F)	(p, q)	„ „ : p oder q, aber nicht beide.	$(p \,.\, \sim q : \vee : q \,.\, \sim p)$
(W F F W)	(p, q)	„ „ : Wenn p, so q; und wenn q, so p.	$(p \equiv q)$
(W F W F)	(p, q)	„ „ : p	
(W W F F)	(p, q)	„ „ : q	
(F F F W)	(p, q)	„ „ : Weder p, noch q.	$(\sim p \,.\, \sim q$ oder $p \mid q)$
(F F W F)	(p, q)	„ „ : p und nicht q.	$(p \,.\, \sim q)$
(F W F F)	(p, q)	„ „ : q und nicht p.	$(q \,.\, \sim p)$
(W F F F)	(p, q)	„ „ : q und p.	$(q \,.\, p)$
(F F F F)	(p, q)	Kontradiktion (p und nicht p; und q und nicht q.)	$(p \,.\, \sim p \,.\, q \sim q)$



Première formulation complète des tables de vérité pour les 16 connecteurs logiques à deux variables (p,q)

L. Wittgenstein "Tractatus Logico-Philosophicus", 5.101 , Wien (1918)

historique

« Boolean Algebra » à la base de l'informatique moderne

Puis vint une tendance générale vers une plus grande abstraction du formalisme en mathématiques, conduisant à un relâchement des liens avec le système algébrique introduit par Boole.

Dans son article en 1904*, Edward V. Huntington (1874-1952) énonce les postulats de la « Boolean Algebra »

** Huntington, E.V., "Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic", Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 5, No. 3, July 1904, 288-309*

Real # Algebra	Boolean Algebra
• MULT (times)	• AND
+ ADD (plus)	+ OR
plus	OR
$x+0=x$	$x+0=x$
$x+1=x+1$	$x+1=1$
$x+x=2x$	$x+x=x$
times	AND
$x\cdot 0=0$	$x\cdot 0=0$
$x\cdot 1=x$	$x\cdot 1=x$
$x\cdot x=x^2$	$x\cdot x=x$
$(x+y)\cdot(x+y)$ $=x^2+2xy+y^2$	$(x+y)\cdot(x+y)$ $=x+y$

historique

Projecteurs : John Von Neumann (1903-1957)

Projecteurs comme propositions dans

Mathematical Foundations of Quantum Mechanics" 1932, p.249.

5. PROJECTIONS AS PROPOSITIONS 249

To each property $\mathfrak{E}$ we can assign a quantity which we define as follows: each measurement which distinguished between the presence or absence of $\mathfrak{E}$ is considered as a measurement of this quantity, such that its value is 1 if $\mathfrak{E}$ is verified, and zero in the opposite case. This quantity which corresponds to $\mathfrak{E}$ will also be denoted by $\mathfrak{E}$.

Formalisme de la "matrice densité" pour la mécanique quantique. L'état quantique $|\psi\rangle$ peut être représenté par son projecteur: $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

Avec Garret Birkhoff papier fondateur de la "logique quantique"

THE LOGIC OF QUANTUM MECHANICS

By Garrett Birkhoff and John von Neumann

Annals of Mathematics
Vol. 37, No. 4, October, 1936

historique

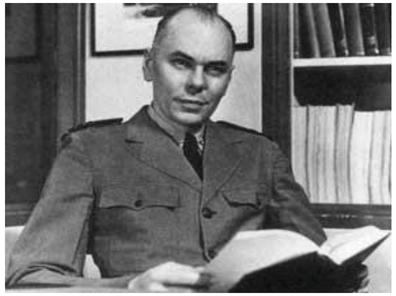
l'ordinateur « Harvard Mark » de Howard H. Aiken (1900-1973)

- À la fin des années 1930, l'étudiant diplômé de Harvard, Howard Aiken rêvait d'un ordinateur. Sa thèse de doctorat en physique nécessitait des solutions numériques pour résoudre des équations différentielles non linéaires.

- Le premier ordinateur de Aiken, sous le nom de Harvard Mark I, a été conçu au « Computing Laboratory » de Harvard et construit par IBM entre 1939 et 1944. Au cours des 15 années suivantes ces ordinateurs ont servi pour la recherche scientifique, ainsi que pour l'armée des Etats-Unis.

- Howard Aiken a trouvé que les expressions arithmétiques introduite par G. Boole en logique peuvent être utiles pour concevoir des circuits et de les utiliser dans les ordinateurs Harvard MARK III et MARK IV *.

- **H.H. Aiken, "Synthesis of electronic computing and control circuits" Ann. Computation Laborarატory of Harvard University, XXVII, Harvard University, Cambridge, MA, 1951*

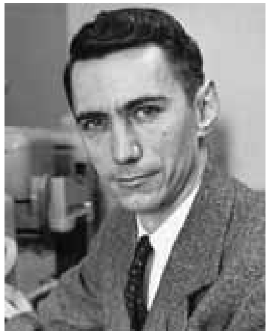


historique

développements de Claude E. Shannon (1916-2001)

Successivement à George Boole plusieurs approches ont été formulés dans le cadre de la formalisation des fonctions logiques dans le domaine des fonctions de commutation (« switching functions »).

En 1938, Claude Shannon a présenté une méthode pour la décomposition des fonctions* appelées développement de Shannon.



$$f = \overline{x}_i f_0 \vee x_i f_1 \qquad f_0 = f|_{x_i=0} \qquad f_1 = f|_{x_i=1}$$

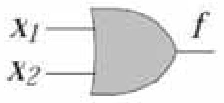
Les termes devant la variable x_i et son complément $\overline{x_i}$ sont les cofacteurs du développement.

**C.E. Shannon, "A Symbolic analysis of relay and switching circuits", Transactions, AIEE, 57:713-723, 1938*

historique

développements de Reed et Muller, formes de Davio

Les développements trouvées par Reed et Muller comprend la constante 1 et les connecteurs XOR, AND, NOT les expressions de Reed-Muller* sont classés comme des expressions de polarité fixes et mixtes.



$f = x_1 \vee x_2$

$$0-polarity: \ f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$$
$$1-polarity: \ f = 1 \oplus \overline{x}_2 \oplus x_1 \overline{x}_2$$
$$2-polarity: \ f = 1 \oplus \overline{x}_1 \oplus \overline{x}_1 x_2$$
$$3-polarity: \ f = 1 \oplus \overline{x}_1 \overline{x}_2$$

**D. E. Muller, "Application of boolean algebra to switching circuit design and to error detection", IRE Transactions on Electronic Computers, 3:6–12, 1954.*

**I. S. Reed, "A class of multiple-error-correcting codes and the decoding scheme", Transactions of the IRE Professional Group on Information Theory, 4:38–49, 1954.*

Comme les formes canoniques peuvent être généralisés par les développements de Shannon les formes Reed-Muller peuvent être généralisées par les développements de Davio**.

$$f = f_0 \oplus x_i f_2 \qquad f = \overline{x}_i f_2 \oplus f_1 \qquad f_0 = f|_{x_i=0} \quad f_1 = f|_{x_i=1} \quad f_2 = f|_{x_i=1} \oplus f|_{x_i=0}$$

*** M.J. Davio, P. Deschamps, A. Thayse, "Discrete and Switching Functions", McGraw-Hill, New York, 1978*

historique

développement spectral des fonctions booléennes

Les fonctions spectrales sont une version discrète des fonctions introduites par Joseph L. Walsh (1895-1973) pour résoudre certains problèmes dans le rapprochement des fonctions de carré intégrable sur l'intervalle 0, 1.

Les fonctions prennent deux valeurs, $+1$ et -1, et à cet égard sont compatibles avec les fonctions de commutation.

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{g}\sum_x f(x)\overline{\chi}_w(x) = \frac{1}{g} < f, \overline{\chi}_w > \qquad f(x) = \sum_w \hat{f}(w)\chi_w(x)$$

Les représentations spectrales sont canoniques, à savoir un spectre unique correspond à une fonction donnée, et vice versa, la fonction peut être reconstruite à partir du spectre de la transformée inverse. Elles jouissent de certaines propriétés comme:

$$\chi_w(x \oplus y) = \chi_w(x)\chi_w(y)$$

Le transfert d'un problème à partir du domaine d'origine dans le domaine spectral peut fournir plusieurs avantages.

historique

logique mulrivaluée

Jan Lukasiewicz (1878-1956) est généralement reconnu comme le fondateur de la théorie moderne de la logique à plusieurs valeurs.

Emil Post (1897-1954) a aussi contribué à cette discipline.

Cette logique a été étudiée et offre un intérêt pour les ingénieurs impliqués dans divers aspects de l'informatique depuis plus de 40 ans. Elle a une longue histoire d'utilisation en CAO dans les langages de description HDL (« Hardware Description Language ») pour la simulation des circuits numériques et leur synthèse.

Des normes ont été établies p. ex. IEEE 1364MVL

SYMBOL	MEANING
0	Logic zero
1	Logic one
Z	High-impedance state
X	Unknown logic value

logique binaire arithmétique : symboles et fonctions idempotentes « électives »

logique binaire arithmétique

symboles « électifs »

Loi fondamentale (idempotence) considéré par G. Boole:

$$x^2 = x \qquad \text{qui est aussi} \qquad x(1-x) = 0$$

Ceci montre que la variable x ne peut prendre que les valeurs 0 et 1 . Ce symbole est dit « électif» (originairement nommé « elective symbol » en anglais et qui signifie « selective »).

On remarque que x « agit » comme un opérateur (projecteur).

Dans *LT* (1854) cette loi est définie comme la « fundamental law of thought »!

logique binaire arithmétique

fonctions « électives »

On peut définir des fonctions f qui jouissent de la même propriété « élective »:

$$f^2 = f \text{ (idempotence)}$$

et qui donc ne peuvent prendre que les valeurs 0 et 1 .

Quelles sont ces fonctions ?

On considérera des fonctions d'un nombre fini n (cardinalité) de variables vers un codomaine de dimension 2:

$$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$

On peut aussi considérer $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^p$ avec $p \leq n$

logique binaire arithmétique

décomposition canonique des fonctions électives

On trouve aisément la forme de la décomposition considérant les valeurs de f prises pour les valeurs $\{0,1\}$.

Pour une seule variable $n = 1$ on considérera les valeurs $f(0)$ et $f(1)$, qui donne comme décomposition unique:

$$f(x) = f(0) + x[f(1) - f(0)] = f(0)(1 - x) + f(1)x$$

Les valeurs $f(0)$ et $f(1)$ sont les « valeurs de vérité » de la fonction logique.

Pour deux variables x et y on aura directement:

$$f(x,y) = f(0,0)(1 - x)(1 - y) + f(0,1)(1 - x)y + f(1,0)x(1 - y) + f(1,1)xy$$

La méthode générale à partir du modèle des « éléments finis » sera présenté après.

logique binaire arithmétique

fonctions booléennes arithmétiques des « connecteurs logiques »

Suivant le classement des tables de vérité on obtient les fonctions logiques sous forme arithmétique pour une variable x (Table 1) et deux variables x et y (Table 2)

function $f_i^{[1]}$	logical proposition	truth table $f(0)\ f(1)$	canonical form $(1-x)\ ,\ x$	polynomial form
$f_0^{[1]}$	F	0 0	0	0
$f_1^{[1]}$	$\bar{A}$	1 0	$(1-x)$	$1-x$
$f_2^{[1]}$	A	0 1	x	x
$f_3^{[1]}$	T	1 1	$(1-x)+x$	1

Table 1: The four single argument logical elective functions

funct. $f_i^{[2]}$	logical proposition for A and B	truth table $f(0,0)$	$f(0,1)$	$f(1,0)$	$f(1,1)$	canonical form $(1-x)(1-y)$, $(1-x)y$, $x(1-y)$, xy	polynomial form
$f_0^{[2]}$	F	0	0	0	0	0	0
$f_1^{[2]}$	$NOR\,,\ \bar{A}\wedge\bar{B}$	1	0	0	0	$(1-x)(1-y)$	$1-x-y+xy$
$f_2^{[2]}$	$A\not\Leftarrow B$	0	1	0	0	$(1-x)y$	$y-xy$
$f_3^{[2]}$	$\bar{A}$	1	1	0	0	$(1-x)(1-y)+(1-x)y$	$1-x$
$f_4^{[2]}$	$A\not\Rightarrow B$	0	0	1	0	$x(1-y)$	$x-xy$
$f_5^{[2]}$	$\bar{B}$	1	0	1	0	$(1-x)(1-y)+x(1-y)$	$1-y$
$f_6^{[2]}$	$XOR\,,\ A\oplus B$	0	1	1	0	$(1-x)y+x(1-y)$	$x+y-2xy$
$f_7^{[2]}$	$NAND\,,\ \bar{A}\vee\bar{B}$	1	1	1	0	$(1-x)(1-y)+(1-x)y+x(1-y)$	$1-xy$
$f_8^{[2]}$	$AND\,,\ A\wedge B$	0	0	0	1	xy	xy
$f_9^{[2]}$	$A\equiv B$	1	0	0	1	$(1-x)(1-y)+xy$	$1-x-y+2xy$
$f_{10}^{[2]}$	B	0	1	0	1	$(1-x)y+xy$	y
$f_{11}^{[2]}$	$A\Rightarrow B$	1	1	0	1	$(1-x)(1-y)+(1-x)y+xy$	$1-x+xy$
$f_{12}^{[2]}$	A	0	0	1	1	$x(1-y)+xy$	x
$f_{13}^{[2]}$	$A\Leftarrow B$	1	0	1	1	$(1-x)(1-y)+x(1-y)+xy$	$1-y+xy$
$f_{14}^{[2]}$	$OR\,,\ A\vee B$	0	1	1	1	$(1-x)y+x(1-y)+xy$	$x+y-xy$
$f_{15}^{[2]}$	T	1	1	1	1	$(1-x)(1-y)+(1-x)y+x(1-y)+xy$	1

Table 2: The sixteen two argument logical elective functions

logique binaire arithmétique

nombre de connecteurs et remarques

Les expressions précédentes peuvent être étendues à n variables de façon « mécanique ».

Le nombre de fonctions différentes pour n variables est donné par le nombre combinatoire 2^{2^n} qui donne 4 fonctions pour une variable, 16 pour deux, 256 pour trois, …

Les expressions obtenues sont « non classiques » (ne correspondent pas à celle de « l' algèbre de Boole ») dans le sens où l'on utilise dans ces expressions les opérateurs arithmétiques usuels $+,-,*$ et aussi des nombres entiers différents de $\{0,1\}$ (en fait des puissances de 2).

Par contre dans « Boolean Algebra » l'addition est modulo 2 et l'opérateur correspondant à la somme logique est le XOR (ou exclusif), on a par exemple : $1+1=0$.

logique binaire arithmétique
relations intéressantes

expression de la **conjonction ET (AND)** qui est le produit des variables:

$$f^{[2]}_{AND}(x,y) = xy \qquad f^{[3]}_{AND}(x,y,z) = xyz$$

expression de la **disjonction OU (OR)** pour 2 et 3 variables

$$f^{[2]}_{OR}(x,y) = x + y - xy$$

qui est la formule d'« inclusion-exclusion » ou formule du « crible » de Poincaré

$$f^{[3]}_{OR}(x,y,z) = x + y + z - xy - xz - yz + xyz$$

Expression de la **disjonction exclusive (XOR)** pour 2 et 3 variables:

$$f^{[2]}_{XOR}(x,y) = x + y - 2xy$$

$$f^{[3]}_{XOR}(x,y,z) = x + y + z - 2xy - 2xz - 2yz + 4xyz$$

Expression de la fonction **majorité** à 3 variables

$$f^{[3]}_{MAJ3}(x,y,z) = xy + xz + yz - 2xyz$$

diagrammes logiques : Venn et « vision » des formes logiques

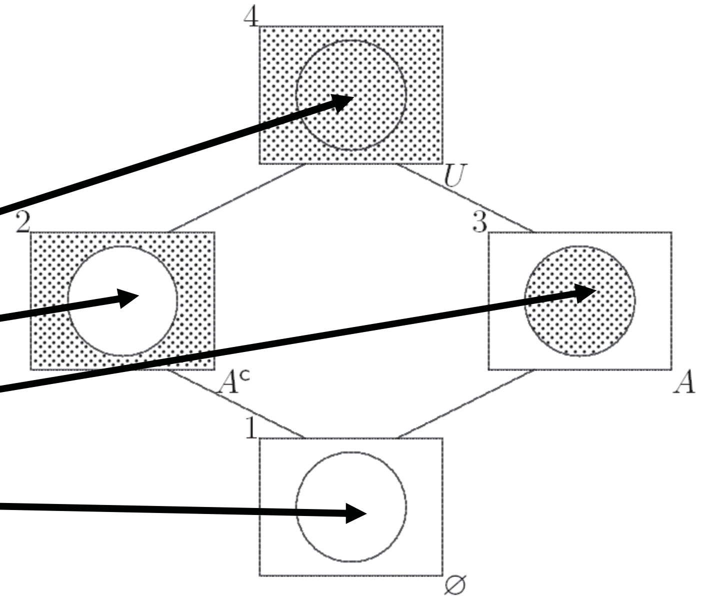
diagrammes de Venn
fonctions d'une variable

Les résultats précédents peuvent être analysés d'une manière graphique grâce aux diagrammes de Venn

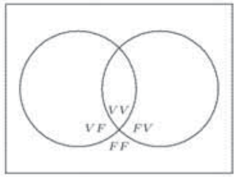
En identifiant les surfaces pleines avec la condition « vrai » (nombre « 1 ») et les surfaces vides par le « faux » (nombre « 0 ») on retrouve aisément les expressions logiques arithmétiques.

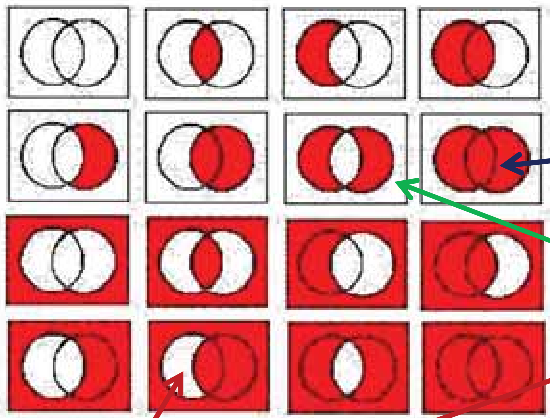
$f_{\emptyset}(x) = 0$ $\quad$ $f_U(x) = 1$

$f_{A^c}(x) = 1 - x$ $\quad$ $f_A(x) = x$



diagrammes de Venn
fonctions de deux variables





0000	0001	0010	0011
0100	0101	0110	0111
1000	1001	1010	1011
1100	1101	1110	1111

Coordinates for the linear 4-space over the two-element field

La **disjonction OR** (0111), , $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$, correspond à la surface obtenue en sommant deux cercles pleins et en retranchent leur intersection :

$$S_A + S_B - S_{A\cap B}$$
$$f_{OR}(x,y) = x + y - xy$$

L' **implication** (matérielle) (1101), $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$, correspond à :

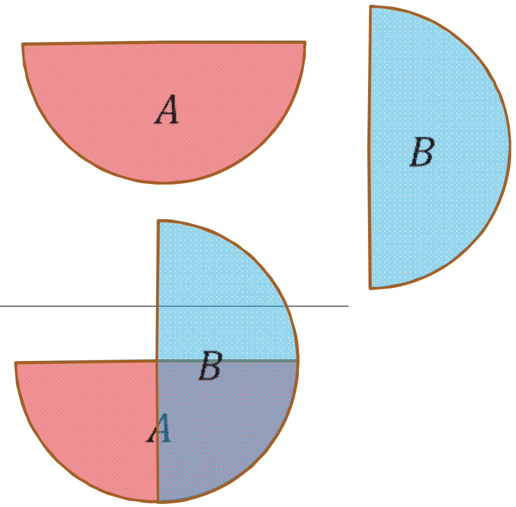
$$S_U - (S_A - S_{A\cap B})$$
$$f_{\Rightarrow}(x,y) = 1 - x + xy$$

La **disjonction exclusive XOR** (0110) , $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$ correspond à la surface obtenue en sommant deux cercles pleins et en retranchant deux fois leur intersection:

$$S_A + S_B - 2\, S_{A\cap B}$$
$$f_{XOR}(x,y) = x + y - 2xy$$

diagrammes de …

« vision » des formes canoniques (2 variables)



Par le même principe que précédemment on peut « voir » les formes canoniques de décomposition de fonctions logiques.

Forme canonique SOP (Sum Of Products)

(disjonction des conjonctions)

$$A \vee B = (\bar{A} \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) \vee (A \wedge B)$$

Forme canonique de « Reed-Muller »

(XOR des conjonctions de même polarité)

$$A \vee B = (A \oplus B) \vee (A \wedge B) = A \oplus B \oplus (A \wedge B)$$

Formule « utile »: théorème de De Morgan

$$\bar{A} \wedge \bar{B} = \overline{A \vee B} \quad \text{et bien sûr} \quad \bar{\bar{A}} = A$$

Permet de passer de SOP à POS (Product Of Sums)

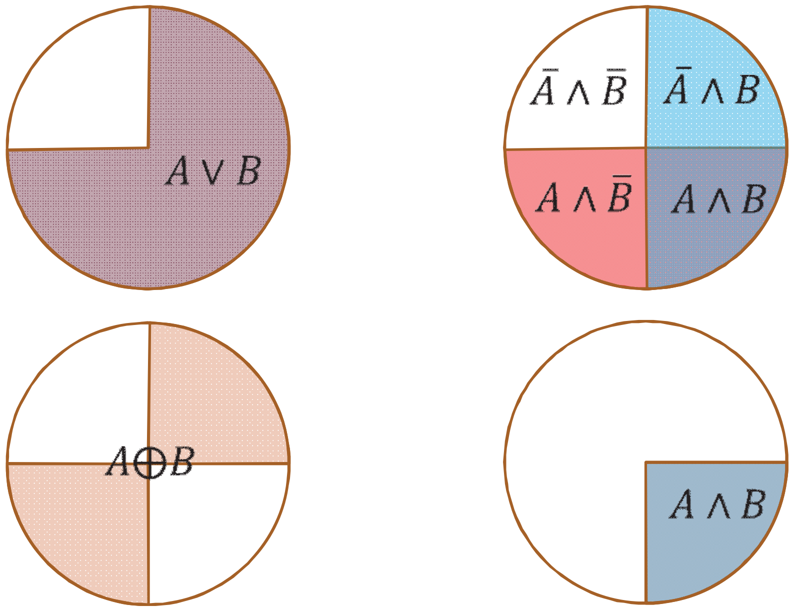
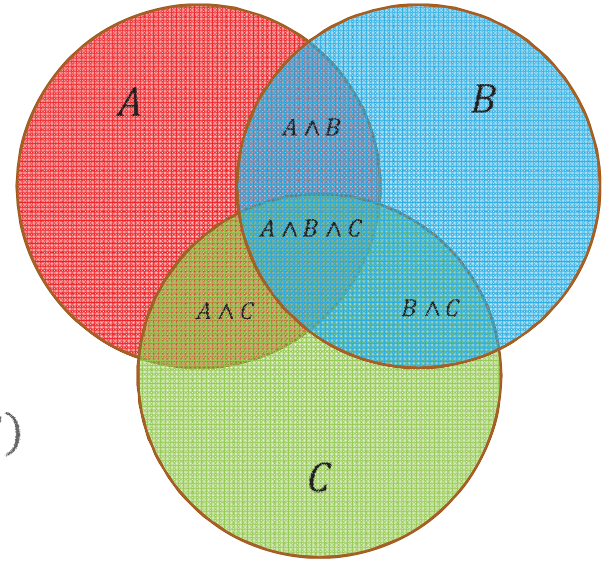


diagramme de Venn

« vision » de la forme Reed-Muller à 3 variables

On peut « voir » la forme canonique de « Reed-Muller »
(XOR de conjonctions de même polarité)

exemples:



$$A \vee B \vee C = A \oplus B \oplus C \oplus (A \wedge B) \oplus (A \wedge B) \oplus (A \wedge C) \oplus (A \wedge B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \oplus (A \wedge B) \oplus (A \wedge B \wedge C)$$

observables quantiques : postulat de la mesure et états quantiques

observables quantiques
postulats de la mécanique quantique

la théorie (mécanique) quantique énonce des postulats qui ont pour but:

1. de décrire l'état d'un système quantique à un instant donné, c'est le postulat de l'état quantique

2. de prévoir le résultat d'une mesure d'une grandeur quantique et de sa probabilité (possibilité de calcul de valeurs moyennes), c'est le postulat sur la mesure d'un état quantique.

3. de décrire l'évolution dans le temps d'un système quantique, c'est le postulat sur l'évolution d'un état quantique.

observables quantiques

postulat de la mesure: résultats et probabilités

Toute grandeur physique mesurable A peut être représenté par un opérateur $\boldsymbol{A}$ agissant dans un espace vectoriel (espace de Hilbert) cet opérateur est une « observable ». Une observable est un opérateur hermitique donc diagonalisable avec des valeurs propres λ_n (« eigenvalues ») réelles.

La mesure d'une grandeur physique A ne peut donner comme résultat qu'une des valeurs propres λ_n de l'observable correspondante $\boldsymbol{A}$.

Lorsque l'on mesure A sur un système décrit par l'état quantique $|\psi\rangle$ (vecteur de l'espace de Hilbert) la probabilité d'obtenir comme résultat de la mesure la valeur propre λ_k est

$P(\lambda_k) = |\langle\psi|\lambda_k\rangle|^2$ (module carré du produit scalaire) où $|\lambda_k\rangle$ est le vecteur propre (« eigenvector ») associé à la valeur propre valeurs propres λ_k.

Immédiatement après la mesure l'état (initial) $|\psi\rangle$ est « projeté » dans l'état (final) $|\lambda_k\rangle$ c'est ce qu'on appelle la « réduction du paquet d'ondes » (« wavefunction collapse »)

observables quantiques

postulat de la mesure: incompatibilité

En général les observables ne commutent pas, ce qui veut dire pour les opérateurs: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ (l'opération est le produit matriciel).

Dans ce cas les observables $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ n'ont pas le même système de vecteurs propres.

D'après le postulat de la mesure (réduction du paquet d'ondes) si on mesure A, on trouve, par exemple, la valeur propre α_k et le système se trouve immédiatement après la mesure dans le vecteur propre correspondant $|\alpha_k\rangle$. Si ensuite on mesure B, on obtient le résultat β_l qui correspond maintenant à un vecteur propre $|\beta_l\rangle$ différent de $|\alpha_k\rangle$.

La mesure de B a fait perdre l'information (correspondant à la connaissance de l'état quantique) qu'on avait par la mesure de A.

Les grandeurs A et B sont dites incompatibles (ou complémentaires…): on ne peut pas les mesurer simultanément.

observables quantiques

postulat de la mesure: compatibilité et dégénérescence

Deux observables $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ qui commutent, $(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{C})$, possèdent une base de vecteurs propres communs.

La mesure de D ne fait pas perdre l'information sur C et, de même, l'information sur C ne fait perdre l'information sur D. Les observables $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ sont dites compatibles: on peut les mesurer simultanément.

Il se peut que la mesure de la seule grandeur physique C ne lève pas l'ambiguïté sur l'état quantique, ceci est le cas des valeurs propres dégénérées, une même valeur propre peut correspondre à plusieurs états propres différents qui font partie du même sous-espace vectoriel.

Pour lever l'ambiguïté on peut effectuer une deuxième mesure à l'aide d'une observable compatible adaptée, en effet celle-ci ne va pas changer l'état mesuré.

observables quantiques

notation de Dirac

En mécanique quantique on utilise la notation de Dirac pour représenter les vecteurs d'état et les opérateurs, ceci permet de généraliser le calcul matriciel en s'affranchissant de devoir exprimer les quantités dans une base particulière.

On a déjà vu que le vecteur d'état s'écrit $|\psi\rangle$ qui est le « ket », aussi le produit scalaire entre deux vecteurs $|\psi\rangle$ et $|\varphi\rangle$ s'écrit: $\langle\varphi|\psi\rangle$. En mécanique quantique les vecteurs sont normés $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

L'écriture $\langle\varphi|$ représente le vecteur « dual » et est nommé « bra ».

$|\psi\rangle\langle\psi|$ représente un opérateur et plus précisément il s'agit d'un projecteur de rang 1 (rayon). En mécanique cet opérateur est aussi nommé « matrice densité » associé à l'état quantique (pur) $|\psi\rangle$ et revêt une grande importance (formalisé par Von Neumann).

Dans la suite la formulation « Eigenlogic » fera appel à cet opérateur.

observables quantiques

décomposition spectrale d'une observable

On peut exprimer une observable $\boldsymbol{O}$ de façon compacte en fonctions de ses valeurs propres et ses vecteurs propres:

$$\boldsymbol{O} = \sum_n \lambda_n |n\rangle\langle n|$$

Ce qui signifie que tout observable est obtenue en décomposant sur tous les projecteurs $|n\rangle\langle n|$ de la base des vecteurs propres et en multipliant chaque projecteur par la valeur propre correspondante λ_n.

Dans les cas qui nous intéressent ici (base discrète) la complétude des projections impose:

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{I}_n$$

où $\mathbb{I}_n$ représente l'opérateur identité sur l'espace de dimension n. Cette relation est vérifiée pour toute base orthonormée

observables quantiques

représentation matricielle

En représentation matricielle sur la base des vecteurs propres l'observable $\boldsymbol{O}$ s'écrit (pour un cas à 3 dimensions):

$$\boldsymbol{O}^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs de base seront alors $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Et si on « applique » l'observable sur un des vecteurs propres on obtient par exemple:

$$\boldsymbol{O}|2\rangle=\lambda_2|2\rangle \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

observables projecteurs logiques : logique à l'aide de l'algèbre linéaire

observables projectives logiques

motivation

Une proposition dans un système logique peut être représentée par une observable dans l'espace de Hilbert. Cette observable présentant les mêmes caractéristiques qu'une observable quantique peut être considérée comme une **observable logique**.

Le point de vue ici, sous le nom de « **Eigenlogic** »*, estime que les valeurs propres des observables logiques sont les valeurs de vérité d'une proposition et les vecteurs propres associés correspondent aux différentes propositions atomiques.

A l'inverse, un système quantique lorsqu'il est considéré dans son espace propre est formellement équivalent à un système logique propositionnel.

Dans le contexte de la mécanique quantique ce modèle utilise des projecteurs de dimension finie.

* *Z. Toffano, "Eigenlogic in the spirit of George Boole". (2015)* arXiv:1512.06632

observables projectives logiques

projecteur de base $\boldsymbol{\Pi}$

Nous allons considérer un projecteur à deux dimensions de rang 1:

$\boldsymbol{\Pi} = |1\rangle\langle 1|$ il est bien sûr idempotent: $\boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\Pi}$ puisque $|1\rangle\langle 1||1\rangle\langle 1|=|1\rangle\langle 1|$

Quels sont les résultats attendus lors de l'application de ce projecteur sur ses deux vecteurs propres, nommés $|0\rangle$ et $|1\rangle$?

$$\boldsymbol{\Pi}|1\rangle = 1|1\rangle \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Pi}|0\rangle = 0|0\rangle$$

La valeur 1 étant la valeur propre du projecteur associé au vecteur propre $|1\rangle$. La valeur 0 étant la valeur propre du projecteur associé au vecteur propre $|0\rangle$.

<u>Les valeurs propres étant réelles l'opérateur représente une observable.</u>

L'action de $\boldsymbol{\Pi}$ peut être vue comme une proposition sur l'appartenance ou non à un état qui aura comme réponse l'une des deux valeurs propres. La valeur 1 (« vrai ») associée au vecteur propre $|1\rangle$ et la valeur 0 (« faux ») au vecteur propre $|0\rangle$.

observables projectives logiques

observables logiques pour un seul argument

Dans un espace à deux dimensions nous exprimons les deux projecteurs de rang 1:

$$\boldsymbol{\Pi}_1 = \boldsymbol{\Pi} = |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Pi}_0 = \boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{\Pi} = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{bien sûr} \quad \boldsymbol{\Pi}_0 + \boldsymbol{\Pi}_1 = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme précédemment pour les fonctions électives nous exprimons les observables logiques par une décomposition:

$$\boldsymbol{F} = f(0)\boldsymbol{\Pi}_0 + f(1)\boldsymbol{\Pi}_1 = \begin{pmatrix} f(0) & 0 \\ 0 & f(1) \end{pmatrix}$$

<u>les valeurs $f(0)$ et $f(0)$ étant les valeurs de vérité et ici aussi les valeurs propres.</u>

Ceci permet d'engendrer les 4 observables logiques à un argument:

$$\boldsymbol{F}_A = 0\boldsymbol{\Pi}_0 + 1\boldsymbol{\Pi}_1 = \boldsymbol{\Pi} \qquad \boldsymbol{F}_{\bar{A}} = 1\boldsymbol{\Pi}_0 + 0\boldsymbol{\Pi}_1 = \boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{\Pi}$$

$$\boldsymbol{F}_\emptyset = 0\boldsymbol{\Pi}_0 + 0\boldsymbol{\Pi}_1 = \mathbb{O}_2 \qquad \boldsymbol{F}_U = 1\boldsymbol{\Pi}_0 + 1\boldsymbol{\Pi}_1 = \boldsymbol{I}_2$$

observables projectives logiques

composition d' observables logiques: produit de Kronecker

L'extension à plus d'arguments est obtenue en utilisant le produit de Kronecker $\otimes$ de la même manière que pour la composition des systèmes quantiques (très utilisé en information quantique sur des « qubits »)

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B \equiv \overbrace{\begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \dots & A_{mn}B \end{bmatrix}}^{nq} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} A \\ A \\ \vdots \\ A \end{bmatrix}}\right\} mp\,.$$

Certaines propriétés du produit Kronecker sur les projecteurs doivent être spécifiés:

(i) Le produit de Kronecker de deux projecteurs est aussi un projecteur

(ii) Si les projecteurs sont de rang 1 (une seule valeur propre est égale à 1, toutes les autres sont 0), alor leur produit de Kronecker est aussi un projecteur de rang 1.

observables projectives logiques

décomposition des observables logiques pour deux arguments

En utilisant les propriétés précédentes, le 4 projecteurs de rang 1, sont calculés simplement.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Pi}_{00} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Pi})\otimes(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Pi}), & \boldsymbol{\Pi}_{01} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Pi})\otimes\boldsymbol{\Pi}, \\ \boldsymbol{\Pi}_{10} = \boldsymbol{\Pi}\otimes(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Pi}), & \boldsymbol{\Pi}_{11} = \boldsymbol{\Pi}\otimes\boldsymbol{\Pi}. \end{cases}$$

Le développements pour les observables logiques sont:

$$\boldsymbol{F} = f(0,0)\,\boldsymbol{\Pi}_{00} + f(0,1)\,\boldsymbol{\Pi}_{01} + f(1,0)\,\boldsymbol{\Pi}_{10} + f(1,1)\,\boldsymbol{\Pi}_{11}\,.$$

Et sous forme matricielle

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} f(0,0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(0,1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(1,0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(1,1) \end{pmatrix}$$

observables projectives logiques

observables logiques : les projecteurs et connecteurs logiques

On peut exprimer les connecteurs logiques correspondant à un "projecteur logique", selon la règle de composition, obtenant ainsi les deux observables logiques pour A et B :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Pi} \otimes \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{\Pi}$$

La conjonction (AND) devient tout simplement: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Pi} \otimes \boldsymbol{\Pi}$

Toutes les autre observables (au nombre de 16) sont obtenues par la méthode générale de la logique arithmétique comme vu précédemment. Elles seront présentés plus loin.

La négation correspond à soustraire de l'opérateur identité $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$.

Toutes les 16 observables logiques sont des projecteurs qui commutent.

Les 4 vecteurs propres communs représentent les différents cas des arguments d'entrée qui constituent les 4 « propositions atomiques » et qui correspondent aux différentes entrées des tables de vérité.

Pour n arguments on aura 2^n cas et 2^{2^n} observables logiques de dimension 2^n

observables isométriques logiques : logique des spins ½

observables isométriques logiques

transformation isométrique lien avec les observables de spin ½

Il y a une bijection linéaire (isomorphisme) du projecteur $\boldsymbol{F}$ vers l'observable réversible $\boldsymbol{G}$ en utilisant la relation:

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{F}\,.$$

Les deux familles d'observables commutent et ont le même système de vecteurs propres.

Pratiquement pour obtenir $\boldsymbol{G}$ de $\boldsymbol{F}$ il suffit de remplacer la valeur propre 0 avec $+1$ et 1 avec -1

Les observables $\boldsymbol{G}$ sont des « isométries » qui correspondent à de opérateurs de réflexion unitaires et réversibles.

Les valeurs propres sont -1 et $+1$ qui correspondent aux valeurs de vérité respectivement «vrai et « faux ».

à partir du projecteur $\boldsymbol{\Pi}$ défini précédemment on obtient :

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z$$

cet opérateur est en fait l'une des matrices de Pauli σ_z et qui en mécanique quantique correspond à la composante z d'un spin ½ d'une particule. Dans le domaine de l'information quantique cet opérateur représente la porte quantique « Pauli-Z » ou porte de « phase- π ».

observables isométriques logiques

observables isométriques: dictateurs, XOR, AND (C^Z)

Pour 2 arguments, on peut alors écrire directement l'expression des observables logiques isométriques en utilisant la décomposition spectrale. Les « dictateurs » logiques sont:

$$U = Z \otimes I, \qquad V = I \otimes Z$$

La disjonction exclusive XOR est ici simplement donnée par le produit des dictateurs $U \cdot V = Z \otimes Z$

nota bene: ici, le connecteur logique "projecteur logique" n'est pas un opérateur de projection, afin d'éviter toute ambiguïté, il est généralement nommé « dictateur ».

Dans le cas des observables logiques isométriques la négation est obtenue en multipliant par -1.

Les développements vont donner des résultats différents de ceux des projecteurs par exemple on obtient pour G_{AND}:

$$\frac{1}{2}(I + U + V - U \cdot V) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = C^Z$$

où l'on reconnait la porte quantique « Control-Z » forme diagonale fe la porte « Control-NOT »

connective for boolean A, B	truth table $\{F, T\}$: $\{0,1\}$; $\{+1,-1\}$	$\{0,1\}$ projective logical observable	$\{+1,-1\}$ isometric logical observable
False F	F F F F	0	$+I$
NOR ; $\overline{A \vee B}$	F F F T	$I - A - B + A \cdot B$	$\frac{1}{2}(+I - U - V - U \cdot V)$
$A \nLeftarrow B$	F F T F	$B - A \cdot B$	$\frac{1}{2}(+I - U + V + U \cdot V)$
$\overline{A}$	F F T T	$I - A$	$-U$
$A \nRightarrow B$	F T F F	$A - A \cdot B$	$\frac{1}{2}(+I + U - V + U \cdot V)$
$\overline{B}$	F T F T	$I - B$	$-V$
XOR ; $A \oplus B$	F T T F	$A + B - 2A \cdot B$	$U \cdot V = Z \otimes Z$
NAND ; $\overline{A \wedge B}$	F T T T	$I - A \cdot B$	$\frac{1}{2}(-I - U - V + U \cdot V)$
AND ; $\bar{A} \wedge B$	T F F F	$A \cdot B = \Pi \otimes \Pi$	$\frac{1}{2}(+I + U + V - U \cdot V)$
$A \equiv B$	T F F T	$I - A - B + 2A \cdot B$	$-U \cdot V$
B	T F T F	$B = I \otimes \Pi$	$V = I \otimes Z$
$A \Rightarrow B$	T F T T	$I - A + A \cdot B$	$\frac{1}{2}(-I - U + V - U \cdot V)$
A	T T F F	$A = \Pi \otimes I$	$U = Z \otimes I$
$A \Leftarrow B$	T T F T	$I - B + A \cdot B$	$\frac{1}{2}(-I + U - V - U \cdot V)$
OR ; $A \vee B$	T T T F	$A + B - A \cdot B$	$\frac{1}{2}(-I + U + V + U \cdot V)$
True T	T T T T	I	$-I$

logique floue :
« valeur moyenne de vérité »

logique floue

état quantique qui n'est pas état propre de l'observable logique

La « logique floue » (« fuzzy logic ») traite des valeurs de vérité qui peuvent être des nombres compris entre 0 et 1, donc la vérité d'une proposition peut se situer entre « tout à fait vrai » et « complètemen faux »

Les vecteurs $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ et $|11\rangle$ forment une base orthonormée complète correspondant aux deu entrées des propositions logiques. Lors de l'application d'une observable logique sur l'un de ces vecteurs, la valeur propre résultante correspondra à la valeur de vérité pour les entrées considérées.

Qu'est-ce qui se passe lorsque l'état n'est pas l'un des vecteurs propres du système logique?

En mécanique quantique on peut toujours exprimer un vecteur d'état comme une décomposition sur une base orthonormée complète. En particulier, nous pouvons l'exprimer sur base propre canonique de la famille observable logique:

$$|\Psi> = C_{00}\,|00> + C_{01}\,|01> + C_{10}\,|10> + C_{11}\,|11>$$

Interprétation: quand un seul des coefficients est non nul, alors nous sommes dans la situation précédente d'un cas atomique propositionnel déterminée. Mais quand plus d'un coefficient est non nu nous sommes dans le cas d'une proposition "floue".

logique floue

valeur moyenne d'un « projecteur » logique

On peut alors calculer la valeur "moyenne" d'une observable logique. En particulier, l'observable logique projective $\boldsymbol{F}$ permet d'obtenir une «mesure» de la proposition logique sous la forme de la «fonction d'appartenance floue » (« fuzzy membership function ») μ.

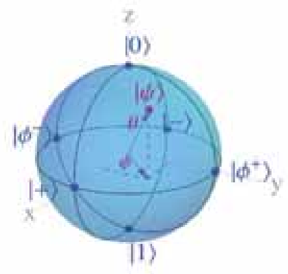
Si l'on considère l'état quantique générique $|\varphi >= \sin\alpha\,|0> + e^{i\beta}\cos\alpha\,|1>$

On peut effectuer la valeur moyenne quantique (règle de Born) par rapport à l'observable projecteur logique:

$$\mu(a) = <\varphi|\boldsymbol{\Pi}|\varphi> = \cos\alpha e^{-i\beta} <1\,(||1><1|)\cos\alpha e^{i\beta}|1> = \cos^2\alpha$$

On peut faire la même opération pour le complément: $\mu(\overline{a}) = <\varphi|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}|\varphi> = \sin^2\alpha = 1 - \mu(a)$

Ceci vérifie l'une des conditions de la logique floue pour le complément (négation) d'un « ensemble flou (« fuzzy set »)



logique floue

projection, conjonction et disjonction des états composés

Un état composé quantique peut être construit en prenant le produit tensoriel : $|\psi>=|\varphi_p>\otimes|\varphi_q>$

Où les états $|\varphi_p\rangle$ et $|\varphi_q\rangle$ représentent les deux états élémentaires (qubits) qui peuvent s'exprimer en fonction des angles de la sphère de Bloch. Par exemple: $|\varphi_p>=\cos\frac{\theta_p}{2}|0>+e^{i\varphi_p}\sin\frac{\theta_p}{2}|1>$

On peut calculer la fonction d'appartenance floue du projecteur logique correspondant pour le cas à deux arguments en effectuant la valeur moyenne quantique:

$$\mu(a)=<\psi|\boldsymbol{\Pi}\otimes\boldsymbol{I}|\psi>=p(1-q)+p\cdot q=p\,,\quad \mu(b)=<\psi|\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{\Pi}|\psi>=q$$

Ceci montre que les valeurs moyennes correspondent aux probabilités respectives.
Nous allons « mesurer » par exemple la conjonction et la disjonction, en utilisant les observables logiques, ce qui donne:

$$\begin{cases}\mu(a\wedge b) &= <\psi|\boldsymbol{\Pi}\otimes\boldsymbol{\Pi}|\psi> = p\cdot q = \mu(a)\cdot\mu(b)\,,\\ \mu(a\vee b) &= p+q-p\cdot q = \mu(a)+\mu(b)-\mu(a)\cdot\mu(b)\end{cases}$$

logique floue

états non séparables (intriqués)

Qu'est-ce qui se passe lorsque le vecteur d'état $|\psi\rangle$ ne peut pas être mis sous la forme d'un produit tensoriel, ce qui signifie qu'il est dans un état intriqué?

Un résultat intéressant peut être démontré: la valeur moyenne quantique de toute observable logique projective $\boldsymbol{F}$ sur un état quantique arbitraire $|\psi\rangle$ vérifie toujours l'inégalité suivante:

$$< \Psi|\boldsymbol{F}|\Psi > = \operatorname{Tr}(\rho_{\Psi} \cdot \boldsymbol{F}) \leq 1$$

Où Tr représente l'opération trace d'opérateur. L'opérateur $\rho_{\psi} = |\psi\rangle\langle\psi|$ est la « matrice densité » associée à l'état quantique (pur) $|\psi\rangle$.

<u>Cette « mesure » peut être interprétée comme une probabilité.</u>

logique multivaluée : analogie avec le moment cinétique quantique

logique multivaluée
caractéristiques

La logique multivaluée (terme employé pour la logique à plus de deux valeurs) nécessite une structure algébrique différente de la logique binaire ordinaire.

De nombreuses propriétés de la logique binaire ne prennent pas en charge l'ensemble des valeurs qui ne possèdent pas la cardinalité 2^n.

Cette forme de logique est souvent utilisé pour le développement de systèmes logiques qui sont plus expressifs que les systèmes booléens pour des nécessités de raisonnement.

Le nombre total de connecteurs logiques pour un système de n arguments à m valeurs est le nombre combinatoire m^{m^n}, en particulier pour un système à 1 argument prenant 3 valeurs le nombre de connecteurs sera $3^{3^1} = 27$ et pour un système à 2 arguments prenant 3 valeurs le nombre de connecteurs sera $3^{3^2} = 19683$.

logique multivaluée

développement des fonctions par la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis permet d'interpoler une fonction $f(x)$, c'est à dire de rendre explicite les valeurs de $f(x_i)$ à partir des valeurs de certains nombres fixés, qui constituent les « degrés de liberté ».

Prenons l'exemple simple suivant: étant donné les valeurs $f(+1)$, $f(0)$ et $f(-1)$ d'une fonction au niveau des points particuliers $x = +1; 0; -1$.

La structure linéaire obtenue montre qu'il est naturel d'envisager un espace à trois dimensions. Les fonctions de base, φ_i, associées à l'ensemble des degrés de liberté et à l'espace des polynômes résolvent ce problème. On obtient les trois fonctions de base:

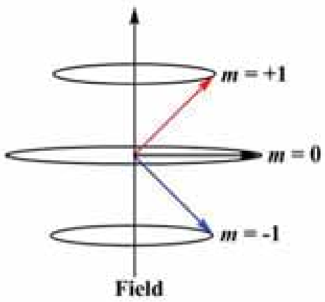
$$\varphi_{+1}(x) = \frac{1}{2} x\,(x+1)\,, \quad \varphi_0(x) = 1 - x^2\,, \quad \varphi_{-1}(x) = \frac{1}{2} x\,(x-1)$$

Ainsi on peut développer en général une fonction sur cette base:

$$f(x) = \sum_{i=+1,0,-1} f(i)\ \varphi_i(x)\,, \qquad \sum_{i=+1,0,-1} \varphi_i(x) \equiv 1$$

logique multivaluée

identification le système quantique: moment orbital l =1



Le moment cinétique quantique est caractérisé par deux nombres quantiques: le nombre de moment angulaire j et le nombre moment magnétique m_j. Les règles sont les suivantes: j entier ou demi-entier et $j \geq 0$ et $-j \leq m_j \leq +j$ aussi entier ou demi-entier.

Le cas $j = s = {}^1/_2$ correspond au spin (moment cinétique intrisnèque) et a été précédemment identifié avec la logique binaire isométrique de valeur $\{-1, +1\}$.

Nous allons considérer le cas du moment cinétique orbital de valeur $j = l = 1$ et $m_l \in \{+1, 0, -1\}$ et l'identifier avec un système trivaluée.

L'observable de la composante z du moment cinétique orbital $\boldsymbol{L}_z$ est:

$$\boldsymbol{L}_z = \hbar \boldsymbol{\Lambda} = \hbar \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

logique multivaluée

observables logiques pour le système trivaluée $\{-1, 0, +1\}$

Dans la matrice précédente les valeurs propres, $\{+1, 0, -1\}$, peuvent être considérés comme les valeurs logiques. Une convention cohérente de ces valeurs, qui étend la logique binaire, est la suivante

$$\text{"false"}\ F \equiv +1 \quad , \quad \text{"neutral"}\ N \equiv 0 \quad , \quad \text{"true"}\ T \equiv -1$$

Nous pouvons maintenant exprimer les observables logiques à trois valeur en tant que décomposition spectrales sur les projecteurs de rang-1 de l'espace vectoriel à trois dimensions. Ces opérateurs correspondent aux matrices de densité des trois vecteurs propres $|+1\rangle$, $|0\rangle$ et $|-1\rangle$ de $\boldsymbol{L}_z$ et sont exprimés par:

$$\boldsymbol{\Pi}_{+1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{I}\right) \qquad \boldsymbol{\Pi}_0 = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Lambda}^2 \qquad \boldsymbol{\Pi}_{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{I}\right)$$

Tout observable de ce système peut s’exprimer comme une décomposition sur ces trois projecteurs de base.

logique multivaluée

connecteurs logiques pour deux arguments et trois valeurs

Lorsque l'on considère un système à 2 arguments et 3 valeurs, le développement est obtenu en utilisant le produit de Kronecker de la même manière que pour le système binaire.

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i,j\,=+1,0,-1} f_{ij}\, \boldsymbol{\Pi}_i \otimes \boldsymbol{\Pi}_j\,, \qquad f_{ij} \in \{+1, 0, -1\}$$

Les observables logiques sont maintenant des matrices 9x9.

Nous pouvons définir les "dictateurs", $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$, simplement par la règle de composition:

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda} \otimes \boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{\Lambda} \qquad \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Lambda} \otimes \boldsymbol{\Lambda}$$

logique multivaluée

exemple: connecteurs logiques Min at Max pour trois valeurs

Dans la logique trivaluée, les connecteurs logiques Min et Max sont souvent utilisés, définis par leurs tables:

Min $U \setminus V$	F	N	T
$F \equiv +1$	$+1$	$+1$	$+1$
$N \equiv 0$	$+1$	0	0
$T \equiv -1$	$+1$	0	-1

Max $U \setminus V$	F	N	T
$F \equiv +1$	$+1$	0	-1
$N \equiv 0$	0	0	-1
$T \equiv -1$	-1	-1	-1

En utilisant les relations de développement trouvées précédemment et des règles de réduction logiques, en raison de la complétude des opérateurs de projection, nous obtenons les observables logiques suivantes:

$$\begin{cases} \mathrm{Min}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}+\boldsymbol{U}^2+\boldsymbol{V}^2-\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}-\boldsymbol{U}^2\cdot\boldsymbol{V}^2\right) \\ \mathrm{Max}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}-\boldsymbol{U}^2-\boldsymbol{V}^2+\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}+\boldsymbol{U}^2\cdot\boldsymbol{V}^2\right) \end{cases}$$

<u>La logique binaire doit être incluse dans la logique ternaire</u>, nous pouvons vérifier ce fait en éliminant l'état neutre. Le connecteur Min devient la conjonction, ET, et Max la disjonction, OR, nous trouvons les résultats précédents pour les observables logiques dans le système $\{-1,+1\}$

conclusion et perspectives

Nous avons présenté un formalisme opérationnel nommé "Eigenlogic" en utilisant des observables quantiques dans l'espace de Hilbert.

L'idée de « Eigenliogic » est la suivante:

- Les valeurs propres d'une observable logique représentent les valeurs de vérité du connecteur logique correspondant.
- Les vecteurs propres associés correspondent à l'une des combinaisons fixes des entrées (propositions atomiques).
- Le résultat d'une «mesure» ou «observation» sur une observable logique donnera la valeur de vérité de la proposition logique associée, et deviendra «interprétable» lorsque l'observation se fait dans l'espace propre conduisant à une analogie naturelle avec le postulat de mesure en mécanique quantique.
- Si l'observation est faite en dehors de l'espace propre de l'observable logique, ce qui signifie que les propositions atomiques d'entrée ne sont pas univoquement déterminées (« floues »), alors la valeur moyenne quantique (règle de Born) de l'observable donnera la mesure « floue » qui est la probabilité associé à la valeur de vérité.

Ce formalisme pourrait ouvrir des perspectives nouvelles:

- Méthode basée sur l'algèbre linéaire également adaptée à la logique multivaluée. Pourrait être à la base d'approches algorithmiques utilisant les observables logiques dans des espaces vectoriels de grande dimension.

- Le fait que les observables logiques sont identifiées avec les observables de moment cinétique en mécanique quantique pourrait être important pour la physique. Le cas très important du moment cinétique intrinsèque, spin ½ est formellement identifiée avec des observables logiques isométriques sur les valeurs $\{-1, +1\}$.

- Nouvelle perspective dans le domaine du calcul quantique parce que plusieurs des observables logiques se révèlent être des portes quantiques bien connues. Ici, nous les représentons, dans leur base propre, les formes «normales» étant facilement récupérés par des transformations unitaires.

- De la même manière cette approche pourrait être d'intérêt pour la communauté « Quantum Interaction » où les approches quantiques sont appliquées en dehors de la physique par exemple dans les sciences humaines et sociales et epuevent être fondées sur une base logique. Nos résultats sont en accord avec des modèles récents de « quantum cognition » (T. Veloz) publié récemment.

Don't get involved in partial problems, but always take flight to where there is a free view over the whole *single* great problem, even if this view is still not a clear one.

Merci